Die
Arithmetik der Griechen

von

Friedrich von Drieberg.

Erster Theil.

Leipzig, 1819.
In Commission bei J. A. G. Weigel.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Schlichte Arithmetik.

1.

Eintheilung der Mathematik.

Nicomach. Geras. Arithm. lib. 1. p. 4. Jamblich. in Nicomach. Arithm. edit. Tennul. p. 6 et 7. Boeth. Arithm. lib. 1. cap. 1. Boeth. de Mus. lib. 2. cap. 5. Aristot. categor. p. 26.

Die Mathematik ist die Wissenschaft der Größen. Jede Größe ist entweder abgesondert (διωρισμένον) oder stetig (συνεχές). Die abgesonderte Größe ist in der Abnahme begrenzt, und in der Zunahme unbegrenzt; die stetige Größe in der Zunahme begrenzt, und in der Abnahme unbegrenzt. Diejenige Wissenschaft aber, welche sich mit abgesonderten Größen beschäftigt, heißt die Arithmetik; die welche sich mit stetigen Größen beschäftigt, die Geometrie.

2.

Erklärungen.

Euclid. Elem. lib. 7. defin. 15. Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 29. Papp. Alexand. collect. edit. Wallis. p. 597.

a. Wenn zwei oder mehrere Zahlen in eine Zahl vereint werden; so heißt dies in der neuern Arithmetik addiren. Die Griechen nennen es *συντιθέναι* zusammensetzen, oder *προστάττειν* zusetzen; die Summe aber heißt *τὸ ὅλον* das Ganze, der Bestand.

b. Wenn eine Zahl um die Größe einer andern Zahl verkleinert wird; so heißt dies in der neuern Arithmetik subtrahiren. Die Griechen nennen es *αφαιρεῖν* abnehmen, trennen; der Rest aber heißt *ὁ λοιπὸς* der Uiberschuß.

c. Wenn eine Zahl so oft vereint genommen wird, als in einer andern Zahl Einheiten enthalten sind; so heißt dies in der neuern Arithmetik multipliciren. Die Griechen nennen es *πολλαπλασιάζειν* vervielfältigen, und die Zahlen, welche einander vervielfältigen — nemlich die Faktoren — *τὰ πλευρὰ* die Seiten; das Produkt aber heißt *τὸ γενόμενον* das Erzeugniß.

d. Wenn untersucht wird, wie oft eine Zahl und wie viel ihrer Theile, in einer andern Zahl enthalten sind; so heißt dies in der neuern Arithmetik dividiren. Die Griechen nennen es sowohl μετρεῖν messen, als μερίζειν theilen; denn wieviel Maaße eine Zahl hat, soviel hat sie auch Theile. Im engern Verstande aber heißt messen, wenn eine Zahl die andere in gleiche Theile theilt (erschöpft). Die Zahl welche gemessen wird — nemlich der Dividendus — heißt τὸ ὅλον das Ganze; die Zahl womit gemessen wird — nemlich der Divisor — το μέτρον das Maaß, die Maaßzahl; der Quotient aber heißt: die Zahl nach welcher gemessen wird, oder der Enthalt.

3.

Feststellungen.

Euclid. Elem. lib. 7. defin. 3. ib. lib. 7. prop. 1. ib. lib. 10. prop. 2.

a. Das Größere mißt nicht das Kleinere.

b. Von einem Ganzen kann nicht mehr genommen werden als das Ganze.

c. Ein Ganzes ist, dem kein Theil fehlt.

d. Ein Theil ist, der das Ganze mißt.

4.

Von der Einheit.

Euclid. Elem. lib. 7. defin. 1. ib. lib. 10. prop. 29. lemm. 2. Euclid. sect. canon. theor. 3. Theon. smyrn. Arithm. edit. Bulliald. cap. 3. Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 11, 12, 13, 25 et 81.

Die Einheit (μονὰς) ist, nach welcher jedes Einzelne Eins heißt. — Ich sage die Einheit ist untheilbar. Denn da jedes Einzelne, es sei groß oder klein, Eins heißt, so bleibt die Größe der Einheit selbst unbestimmt. Nehme ich aber von einem Ganzen die Hälfte, so setzt dies voraus, daß ich die Größe des Ganzen kenne; denn zwei Hälften machen ein Ganzes. Die Größe der Einheit aber kenne ich nicht, und kann also auch nicht die Hälfte davon nehmen. Aber auch keinen andern Theil. Folglich ist die Einheit untheilbar.

Ein anderer Beweis.

Das Größere mißt nicht das Kleinere (3. a.). Soll daher die Einheit getheilt werden, so kann dies nur durch eine Größe geschehen, welche kleiner als die Einheit ist (3. d.). Aber es giebt keine kleinere Größe als die Einheit. Doch gesetzt, es

gäbe eine solche kleinere Größe, so würde diese die Einheit, die Einheit Eins aber ein Vieles sein, was nicht möglich ist. Folglich ist die Einheit untheilbar.

5.

Von den Zahlen.

Nicomach. Geras. Arithm. lib. 1. p. 9. Euclid. Elem. lib. 7. defin. 2. Theon. smyrn. Arithm. cap. 4. Jamblich in Nicomach. Arithm. p. 13. Boeth. Arithm. lib. 1. cap. 3. Boeth. Geom. lib. 1. p. 1518. Psell. Arithm. ed. Xil. p. 1.

Eine Zahl (ἀριθμὸς) ist eine aus Einheiten bestehende Größe (Menge). Die kleinste Zahl ist 2, denn die Einheit ist zwar die Quelle aller Zahlen, aber selbst keine Zahl. — Die Zahlen werden eingetheilt:

a. in gerade und ungerade,

b. in vollkommene und unvollkommene, und

c. in Flächen- und Körperzahlen.

a. Von den geraden und ungeraden Zahlen.

Euclid. Elem. lib. 7. defin. 6, 7 et 11. Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 27.

Eine gerade Zahl (ἄρτιος) ist, welche halbirt werden kann; eine ungerade Zahl (περιττός) wel-

che nicht halbirt werden kann, oder welche von einer geraden Zahl um Eins unterschieden ist. Die geraden Zahlen sind entweder ganz gerade oder halb gerade; die ungeraden Zahlen aber entweder ganz ungerade, oder halb ungerade.

Ganz gerade (ἀρτιάκις ἄρτιος) ist eine Zahl, welche bis zur Einheit fort halbirt werden kann, wie z. B. 64; als 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Halb gerade (ἀρτιάκις περιττός) ist eine Zahl, welche nicht bis zur Einheit fort halbirt werden kann, wie z. B. 48; als 48, 24, 12, 6, 3.

Eine ganz ungerade Zahl oder Urzahl (πρῶτος ἀριθμὸς) ist, welche in keine andere Zahlen zerfällt, und folglich nur von der Einheit gemessen werden kann. Solche Zahlen sind 3, 5, 7, 11, 13, 17 u. s. w. Diese Zahlen heißen auch unzusammengesetzte Zahlen (ἀσύνθετοι), so wie im Gegentheil alle andere Zahlen — die 2 ausgenommen — weil jede derselben von irgend einer von ihr verschiedenen Zahl gemessen wird, zusammengesetzte Zahlen (σύνθετοι) heißen.

Eine halb ungerade Zahl (περιττάκις περιττός) endlich ist, welche zwar in andere Zahlen zer-

legt, aber nicht halbirt werden kann. Solche Zahlen sind 9, 15, 21, 25, 27 u. s. w.

b. Von den vollkommenen und unvollkommenen Zahlen.

Euclid. Elem. lib. 7. defin. 22. ib. lib. 9. prop. 36. Theon. smyrn. Arithm. cap. 32.

Vollkommen (τέλειος) ist eine Zahl, welche allen ihren Theilen zusammen gleich ist. Die Zahl 6 ist z. B. vollkommen, weil die Zahlen, von welchen sie gemessen wird, und die folglich Theile der 6 sind (3. d.), zusammengesetzt ebenfalls 6 geben. Dasselbe gilt auch von 28.

1		6
2	} 6	3
3		2
6		

1		28
2		14
4	} 28	7
7		4
14		2
28		

Unvollkommen ist eine Zahl, deren Theile zusammen entweder kleiner oder größer sind als sie selbst. Solche Zahlen sind z. B. 14 und 18.

1		14
2	14	7
7		2
10		

1		18
2		9
3	18	6
6		3
9		2
21		

c. Von den Flächen- und Körperzahlen.

Euclid. Elem. lib. 7 defin. 16, 17, 18, 19 et 21. Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 80.

Wenn zwei Zahlen einander vervielfältigen, wie 2 mal 3, so wird das Erzeugniß aus denselben eine Flächenzahl (ἐπίπεδος) genannt. Geschieht die Vervielfältigung mit zwei gleichen Zahlen, wie 3 mal 3, so heißt das Erzeugniß aus denselben eine Viereckzahl (τετράγωνος).

Wenn drei Zahlen einander vervielfältigen, wie 2 mal 3 mal 7, so wird das Erzeugniß aus denselben eine Körperzahl (στερεὸς) genannt. Geschieht die Vervielfältigung mit drei gleichen Zahlen, wie 3 mal 3 mal 3, so heißt das Erzeugniß aus denselben eine Würfelzahl (κύβος).

Ähnlich (ὅμοιος) heißen, sowohl Flächen- als Körperzahlen, wenn sie gleichverhältige Seiten haben.

6.

Lehrsätze von Zahlen.

a. Wenn irgend eine Menge gerader Zahlen zusammengesetzt (2. a.) wird, so ist das Ganze eine gerade Zahl.

Euclid. Elem. lib. 9. prop. 21.

4
6
2
8
——
20

Da die Zahlen 4, 6, 2, 8 gerade sind, so hat jede derselben eine Hälfte, also auch das Ganze 20. Eine gerade Zahl aber ist welche halbirt werden

kann (5. a.). Folglich ist 20 eine gerade Zahl. Was zu beweisen war.

b. Wenn eine gerade Menge ungerader Zahlen zusammengesetzt wird, so ist das Ganze eine gerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 22.

3
5
7
9
24

Da die Zahlen 3, 5, 7, 9 ungerade sind, und eine ungerade Zahl von einer geraden um Eins unterschieden ist (5. a.); so wird jede dieser Zahlen, durch Wegnahme der Einheit, zur geraden Zahl: also auch der Bestand aller (6. a.). Nun aber ist auch die Menge der weggenommenen Einheiten gerade. Folglich das Ganze 24 eine gerade Zahl. Was zu beweisen war.

c. Wenn eine ungerade Menge ungerader Zahlen zusammengesetzt wird, so ist das Ganze eine ungerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 23.

5
7
9
———
21

Da die Zahlen 5, 7, 9 ungerade sind, und man nimmt von einer derselben die Einheit, so bleibt eine gerade Zahl. Aber auch das Gesammte der andern beiden Zahlen ist gerade (6. b.). Also auch der Bestand aller (6. a.) Kommt nun die Einheit hinzu, so wird das Ganze ungerade. Folglich ist 21 eine ungerade Zahl. Was zu beweisen war.

d. Wenn von einer geraden Zahl eine gerade Zahl getrennt (2. b.) wird, so ist auch der Uiberschuß eine gerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 24.

10
4
———
6

Da die Zahl 10 gerade ist, so hat sie eine Hälfte. Aus derselben Ursache hat auch 4 eine Hälfte: folglich auch der Uiberschuß 6. Es ist daher 6 eine gerade Zahl. Was zu beweisen war.

e. Wenn von einer geraden Zahl eine ungerade Zahl getrennt wird, so ist der Uiberschuß eine ungerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 25.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

Da die Zahl 5 ungerade ist, und man nimmt die Einheit davon, so bleibt eine gerade Zahl. Gerade ist auch 12: also auch der Uiberschuß (6. d.). Kommt nun zu diesem Uiberschuß die Einheit, so wird er ungerade. Folglich ist 7 eine ungerade Zahl. Was zu beweisen war.

f. Wenn von einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl getrennt wird, so ist der Uiberschuß eine gerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 26.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 7 \\ \hline 4 \end{array}$$

Da die Zahl 11 ungerade ist, und man nimmt die Einheit davon, so bleibt eine gerade Zahl. Demnach ist der Uiberschuß ungerade (6. e.). Kommt nun zu diesem Uiberschuß die Einheit, so wird er gerade. Folglich ist 4 eine gerade Zahl. Was zu beweisen war.

g. Wenn von einer ungeraden Zahl eine gerade Zahl getrennt wird, so ist der Uiberschuß eine ungerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 27.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

Da die Zahl 9 ungerade ist, und man nimmt die Einheit davon, so bleibt eine gerade Zahl. Gerade ist auch 4: also auch der Uiberschuß (6. d.). Kommt nun zu diesem Uiberschuß die Einheit, so wird er ungerade. Folglich ist 5 eine ungerade Zahl. Was zu beweisen war.

h. Wenn eine ungerade Zahl eine gerade Zahl vervielfältigt (2. c.), so ist das Erzeugniß eine gerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 28.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ \hline 12 \end{array}$$

Da 4 durch 3 vervielfältigt 12 macht, so besteht 12 aus so vielen der 4 gleichen Theilen, als Einheiten in 3 enthalten sind. Nun ist 4 eine gerade Zahl, also 12 der Bestand gerader Zahlen. Der Bestand gerader Zahlen aber ist ebenfalls eine gerade Zahl (6. a.). Folglich ist 12 eine gerade Zahl. Was zu beweisen war.

i. Wenn eine ungerade Zahl eine ungerade Zahl vervielfältigt, so ist auch das Erzeugniß eine ungerade Zahl.

Elem. lib. 9. prop. 29.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

Da 5 durch 3 vervielfältigt 15 macht, so besteht 15 aus so vielen der 5 gleichen Theilen, als Ein-

Einheiten in 3 enthalten sind. Nun sind aber sowohl 5 als 3 ungerade Zahlen: also 15 der Bestand einer ungeraden Menge ungerader Zahlen. Der Bestand einer ungeraden Menge ungerader Zahlen aber ist ebenfalls eine ungerade Zahl (6. c.). Folglich ist 15 eine ungerade Zahl. Was zu beweisen war.

k. Wenn eine zusammengesetzte Zahl irgend eine andere Zahl vervielfältigt, so ist das Erzeugniß eine Körperzahl.

Elem. lib. 9. prop. 7.

$$\begin{array}{c} 7 \\ 6 \\ \hline 42 \end{array}$$

Da 6 eine zusammengesetzte Zahl ist, so wird sie von irgend einer von ihr verschiedenen Zahl gemessen (5. a.). Dies geschieht von 3 nach der Zahl 2. Da nun 3 durch zwei vervielfältigt 6, und 7 durch 6 vervielfältigt 42 macht, so ist 42 eine Körperzahl, deren Seiten 2, 3 und 7 sind (5. c.). Was zu beweisen war.

l. Wenn eine ungerade Zahl eine gerade Zahl mißt (2. d.), so mißt sie auch deren Hälfte.

Elem. lib. 9. prop. 30.

3) 12 ‖ 4   3) 6 ‖ 2
12   6

Da 3 die 12 nach der Zahl 4 mißt, und daher 4 mal 3 gleich 12 ist, so kann 4 nicht ungerade sein; weil sonst 12 aus einer ungeraden Menge ungerader Zahlen zusammengesetzt, und folglich ungerade sein würde (6. c.), wider das Angenommene. Es ist also 4 eine gerade Zahl. Da nun 3 die 12 nach einer geraden Zahl mißt, so mißt sie auch deren Hälfte. Was zu beweisen war.

m. Wenn eine Zahl von Urzahlen gemessen wird, und es die kleinste in ihrer Art ist, so wird sie von keinen andern Urzahlen als diesen gemessen.

Elem. lib, 9. prop. 14.

2) 30 ‖ 15   3) 30 ‖ 10   5) 30 ‖ 6   B) 30 ‖ Z
30   30   30

Es sei 30 die kleinste von den Urzahlen 2, 3, 5 meßbare Zahl. Doch gesetzt 30 würde noch

von einer andern Urzahl als den genannten gemessen, so möge dieses von B nach der Zahl Z geschehen; daß also Z mal B 30 mache. Nun wird 30 von den Urzahlen 2, 3, 5 gemessen. Aber wenn das Erzeugniß der Vervielfältigung zweier Zahlen, von einer Urzahl gemessen wird, so wird diese auch eine von den beiden Zahlen messen, mit welchen die Vervielfältigung geschah. Es wird diesemnach entweder B oder Z von den Urzahlen 2, 3, 5 gemessen. B kann es nicht sein, weil B eine Urzahl und von 2, 3, 5 verschieden ist. Folglich muß es Z sein. Aber das ist ebenfalls unmöglich, da Z kleiner als 30 ist, und 30 schon als die kleinste von 2, 3, 5 meßbare Zahl festgesetzt worden. Demnach wird 30 von keiner andern Urzahl, als 2, 3, 5 gemessen. Was zu beweisen war.

7.

Von den Zahlzeichen oder Ziffern.

Aristot. problem. sect. 13. eorum quae ad res Mathem. pertin. quaest. 3. Papp. Alexand. collect. p. 597. Ptolem. harmon. lib. 1. cap. 15. p. 37. Eutoc. comment. in Archim. dimens. cinc. edit. Wallis. p. 547.

Die Griechen haben, wie wir, und wie wohl die meisten Völker der Erde, eine gezehnte Eintheilung der Zahlen. Die Ziffern derselben sind folgende:

α̅.	1	ι̅.	10	ρ̅.	100	͵α.	1000
β̅.	2	κ̅.	20	σ̅.	200	͵β.	2000
γ̅.	3	λ̅.	30	τ̅.	300	͵γ.	3000
δ̅.	4	μ̅.	40	υ̅.	400	͵δ.	4000
ε̅.	5	ν̅.	50	φ̅.	500	͵ε.	5000
ϛ̅.	6	ξ̅.	60	χ̅.	600	͵ϛ.	6000
ζ̅	7	ο̅.	70	ψ̅.	700	͵ζ.	7000
η̅.	8	π̅.	80	ω̅.	800	͵η.	8000
ϑ̅.	9	ϟ̅.	90	ϡ̅.	900	͵ϑ.	9000

Mit der Zahl 10000 fangen die Myriaden an. Die einfachen Myriaden werden fortgezählt

bis zur Doppelmyriade, die Doppelmyriaden bis zur dreifachen Myriade, die dreifachen Myriaden bis zur vierfachen Myriade, und so ins Unendliche weiter. Geschrieben werden sie auf folgende Art:

$\bar{\alpha}\, M\upsilon.$ oder $M\bar{\alpha}.$ oder $\overset{\alpha}{M}$	10000
$\bar{\alpha}\, M\upsilon.\ M\upsilon.$	10000,0000
$\bar{\alpha}\, M\upsilon.\ M\upsilon.\ M\upsilon.$	10000,0000,0000
$\bar{\alpha}\, M\upsilon.\ M\upsilon.\ M\upsilon.\ M\upsilon.$	10000,0000,0000,0000

8.

Von den Wurzelzahlen.

Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 45 et 124. Eutoc. comment. in Archim. dimens. circ. p. 547. Papp. Alexand. collectan. p. 597. *Boeth. Geom. lib.* 1. p. 1518 et 1519. Colebrook. Lilavati. p. 4.

Wurzelzahlen oder Grundzahlen (*πυθμένες*) heißen bei den Griechen die ersten neun Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; alle aus diesen entspringende Zahlen aber heißen gleichnamige Zahlen (*ὁμώνυμοι*). Diesen Grundsätzen zufolge theilen die Griechen ihre Zahlen in gewisse Ordnungen, und benennen sie nach der Zahl, nach welcher sie

von den Wurzelzahlen gemessen werden. Die erste Ordnung besteht aus den Wurzelzahlen, und da diese nur von sich selbst nach der Einheit gemessen werden, so heißen sie die Einer (μονάδες); die Zahlen der zweiten Ordnung werden von den Wurzelzahlen nach der Zahl 10 gemessen und sie heißen daher die Zehner (δεκάδες); die Zahlen der dritten Ordnung werden von den Wurzelzahlen nach der Zahl 100 gemessen, und sie heißen daher die Hunderter (ἑκατοντάδες); die Zahlen der vierten Ordnung werden von den Wurzelzahlen nach der Zahl 1000 gemessen, und sie heißen daher die Tausender (χιλιάδες) u. s. w. Man sehe untenstehendes Beispiel.

	1	2	3	4	5
Einer	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	
	1	1	1	1	
	6	7	8	9	

Zehner	10	20	30	40	50
	10	10	10	10	10
	1	2	3	4	5
	60	70	80	90	
	10	10	10	10	
	6	7	8	9	
Hunderter	100	200	300	400	500
	100	100	100	100	100
	1	2	3	4	5
	600	700	800	900	
	100	100	100	100	
	6	7	8	9	
Tausender	1000	2000	3000	4000	5000
	1000	1000	1000	1000	1000
	1	2	3	4	5
	6000	7000	8000	9000	
	1000	1000	1000	1000	
	6	7	8	9	

Myriaden	10000	20000	30000	40000	50000
	10000	10000	10000	10000	10000
	1	2	3	4	5
	60000	70000	80000	90000	
	10000	10000	10000	10000	
	6	7	8	9	

Die der Einheit gleichnamigen Zahlen sind demnach 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. die der 2 gleichnamigen Zahlen 20, 200, 2000, 20000 u. s. w. die der 3 gleichnamigen Zahlen 30, 300, 3000, 30000 u. s. w. Die Pythagoräer weichen hiervon ab, und nennen 10 die Einheit der zweiten Ordnung (*δευτερωδουμένη μονὰς*), 100 die Einheit der dritten Ordnung (*τριωδουμένη μονὰς*), 1000 die Einheit der vierten Ordnung (*τετρωδουμένη μονὰς*) u. s. w.

In dem Ziffernsystem der Indier — welches auch das unsrige ist — werden diese Ordnungen durch den Stand, den die Ziffern in einer Zahl einnehmen, bestimmt. Diesen Vortheil entbehrten die Griechen, wiewohl nach dem Boethius zu vermuthen ist, daß ihn die Pythagoräer kannten. Doch ohngeachtet dieser Verschiedenheit des Ziffern-

systems, war bei den Griechen der Mechanismus des Rechnens — den Grundsätzen nach — ganz derselbe wie in der neuern Arithmetik; indem sie wie wir, ihre Rechnungen bloß mit den neun Wurzelzahlen verrichteten.

9.

Von der abgesonderten und stetigen Größe.

Boeth. de Mus. lib. 2. cap. 3. Aristot. Categor. p. 26. Jamblich. in Nicomach. Arithm. p, 6 et 7.

Abgesondert heißt eine Größe, die aus einzelnen von einander getrennten Theilen zusammengesetzt ist, deswegen sie auch von den Pythagoräern die Menge (πλῆθος) genannt wurde. Stetig aber heißt eine Größe, die aus einem zusammenhängenden Ganzen besteht, und wo die Theile nur Abtheilungen sind. — Ich sagte bereits (1.); die stetige Größe (συνεχές) sei in der Zunahme begrenzt und in der Abnahme unbegrenzt; die abgesonderte Größe (διωρισμένον) hingegen in der Abnahme begrenzt und in der Zunahme unbegrenzt. Dies steht jetzt zu erweisen.

Eine Linie von irgend einer bestimmten Länge kann in zwei Hälften, die Hälfte in zwei Viertheile, das Viertheil in zwei Achttheile, das Achttheil in zwei Sechzehntheile, und so ins Unendliche fort, in immer kleinere Abtheilungen zerlegt werden. Denn die Theilung einer stetigen Größe könnte nur aufhören, wenn ihre Theile endlich zu nichts würden, und das ist mit dem Verstande nicht zu fassen. In umgekehrter Folge machen zwei Sechzehntheile ein Achttheil, zwei Achttheile ein Viertheil, zwei Viertheile eine Hälfte, und zwei Hälften das Ganze. Weiter geht die Verdoppelung nicht, denn nichts ist größer als das Ganze.

Jetzt nehme ich irgend eine ganz gerade Zahl (5. a.) z. B. 16. Die Hälfte von 16 ist 8, die Hälfte von 8 ist 4, die Hälfte von 4 ist 2 und die Hälfte von 2 ist 1. Eine weitere Theilung ist nicht möglich, denn nichts ist kleiner als die Einheit (4.). In umgekehrter Folge sage ich: das Doppelte von 1 ist 2, das Doppelte von 2 ist 4, das Doppelte von 4 ist 8, und so durch immer größere Zahlen ins Unendliche fort. Denn die Zunahme einer abgesonderten Größe, könnte nur aufhören, wenn sie durch etwas außer ihr be-

schränkt werden könnte, und das ist mit dem Verstande nicht zu fassen.

Es ist also erwiesen daß die stetige Größe in der Zunahme begrenzt, und in der Abnahme unbegrenzt; die abgesonderte Größe im Gegentheil, in der Abnahme begrenzt und in der Zunahme unbegrenzt ist.

10.

Arithmetik und Logistik.

Procl. in Euclid. Elem. comment. lib. 1. cap. 13. Theon. smyrn. Arithm. cap. 1, 2, 3 et 4.

Die Arithmetik (1.) zerfällt in zwei Abtheilungen, nachdem sie sich entweder unbenannter oder benannter Einheiten bedient. Bedient sie sich unbenannter Einheiten, so heißt sie Arithmetik im engern Verstande; bedient sie sich benannter Einheiten, so heißt sie Logistik. Unbenannt aber sind Einheiten, wenn bloß die Menge derselben, abgesehen von allen andern körperlichen Eigenschaften und Beschaffenheiten, in Betrachtung gezogen wird. Benannt hingegen sind Einheiten, wenn man nicht

ihre Menge allein, sondern auch Anderes ihnen zukommende, wie Masse, Werth, Länge, Breite, Name, Gewicht u. d. g. berücksichtiget.

Sowohl in der Arithmetik als in der Logistik, können mehrere Einheiten eine neue Einheit, d. h. eine Einheit höherer Ordnung, bilden (8.). In der Arithmetik geschieht dies, wenn ich eine bestimmte Menge Einheiten durch 1 bezeichne, z. B. 1 Hundert, 1 Tausend, 1 Myriade u. s. w. Es ist aber hier wohl zu merken, daß nicht 100 oder 1000 oder 10000 Einheiten eine Einheit sind, denn Eins kann niemals auch Vieles sein; sondern man muß es so verstehen, als wenn statt 1 Hundert oder 1 Tausend stände: 1 mal die Menge von hundert Einheiten, 1 mal die Menge von tausend Einheiten u. s. w.

In der Logistik wird eine neue Einheit gebildet, wenn ich z. B. statt 16 Metzen 1 Scheffel, statt 24 Groschen 1 Thaler u. s. w. sage. Denn die Masse eines Scheffels ist größer als die einer Metze, der Werth eines Thalers größer als der eines Groschens. Es ist daher 1 Scheffel als Masse theilbar, als kleinster Theil der Menge untheilbar; 1 Thaler als Werth theilbar, als kleinster Theil der

Menge untheilbar. Wie wir aber statt 16 Metzen 1 Scheffel sagten, so können wir auch wieder statt 1 Scheffel 16 Metzen sagen. In diesem Fall wird jedoch keinesweges die Einheit getheilt, sondern es wird eine andere Einheit angenommen; denn der Scheffel ist jetzt nicht mehr 1 sondern 16, folglich die Metze wieder die Einheit.

Alles dies gilt auch, wenn die Einheit eine stetige Größe bezeichnet. Eine Linie z. B. ist Eins, theile ich diese Linie, so wird aus dem Eins ein Vieles. Habe ich z. B. die Linie in 3 Theile getheilt, so ist, was vorhin 1 war, jetzt 3. Die Einheit also, welche erst die ganze Linie bezeichnete bezeichnet jetzt einen Theil derselben. Wollte man aber annehmen, daß diese 3 Theile der Linie, Theile der Einheit wären, so müßte man auch annehmen, daß 1 zu gleicher Zeit 3 sein könnte, und das wäre ungereimt; denn 3 ist ein Vieles, und Vieles ist der Gegensatz von Eins.

Alle Grundsätze der Arithmetik gelten auch in der Logistik, aber nicht umgekehrt, alle Grundsätze der Logistik, auch in der Arithmetik. Denn die Regel de Tri z. B. und die Sexagesimalrechnung, sind in der Arithmetik ganz unmöglich.

11.

Von den Verhältnissen.

Nicomach. Geras. Arithm. lib. 1. p. 25. Euclid. Elem. lib. 5. desin. 3. ib. lib. 7. desin. 12 et 14. Boeth. Arithm. lib. 1. cap. 21. Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 49. Psell. Arithm. p. 8.

Ein Verhältniß (λόγος) ist die gegenseitige Beziehung zweier Zahlen, in Hinsicht auf die Bildung der einen aus den Theilen der andern. Besteht ein Verhältniß aus Zahlen welche nur die Einheit zum gemeinsamen Maaße haben, wie 2 : 1, 3 : 2, 8 : 5 u. s. w. so heißt dieß ein unzusammengesetztes Verhältniß (ἀσύνθετος) oder ein Urverhältniß (πρῶτος). Besteht aber ein Verhältniß aus Zahlen, welche irgend eine andere Zahl zum gemeinsamen Maaße haben, wie 8 : 4, 9 : 6, 16 : 10 u. s. w. so heißt dies ein zusammengesetztes Verhältniß (σύνθετος). Sind die beiden Glieder eines Verhältnisses einander gleich, so heißt dies ein Verhältniß der Gleichheit (ἰσότης); ist das eine Glied größer als das andere, ein Verhältniß der Ungleichheit (ἀνισότης). Die Verhältnisse der Ungleichheit werden eingetheilt:

a) in vielfache,

b) in übertheilige,

c) in übertheilte,

d) in vielfachübertheilige, und

e) in vielfachübertheilte.

a. Von den vielfachen Verhältnissen.

Ein vielfaches Verhältniß (πολλαπλάσιος) ist ein solches, wo die größere Zahl die kleinere mehrere Male z. B. zweimal, dreimal, viermal, fünfmal u. s. w. in sich faßt.

Enthält die größere Zahl die kleinere zweimal, so heißt dies ein zwiefaches oder doppeltes Verhältniß (διπλάσιος) und erzeugt die Folge 2 : 1, 4 : 2, 6 : 3, 8 : 4 u. s. w.

Enthält die größere Zahl die kleinere dreimal, so heißt dies ein dreifaches Verhältniß (τριπλάσιος) und erzeugt die Folge 3 : 1, 6 : 2, 9 : 3 u. s. w.

Enthält die größere Zahl die kleinere viermal, so heißt dies ein vierfaches Verhältniß (τετραπλάσιος) und erzeugt die Folge 4 : 1, 8 : 2, 12 : 3, u. s. w. Die übrigen Gattungen, als fünffach, sechsfach, siebenfach, u. s. w. eben so.

b. Von den übertheiligen Verhältnissen.

Ein übertheiliges Verhältniß (ἐπιμόριος) ist ein solches, wo die größere Zahl die kleinere einmal und einen ihrer Theile in sich faßt. Eine Folge solcher Verhälnisse ist 3 : 2, 4 : 3, 5 : 4, 6 : 5 u. s. w.

Enthält die größere Zahl die kleinere einmal und halb, wie bei 3 zu 2, so heißt dieses ein überzweites oder anderthalbiges Verhältniß (ἡμιόλιος).

Enthält die größere Zahl die kleinere einmal und den dritten Theil, wie bei 4 zu 3, so heißt dies ein überdrittes Verhältniß (ἐπίτριτος).

Enthält die größere Zahl die kleinere einmal und den vierten Theil, wie bei 5 zu 4, so heißt dies ein überviertes Verhältniß (ἐπιτέταρτος) u. s. w.

c. Von den übertheilten Verhältnissen.

Ein übertheiltes Verhältniß (ἐπιμερής) ist ein solches, wo die größere Zahl die kleinere einmal und noch einige ihrer Theile in sich faßt. Eine Folge solcher Verhältnisse ist 5 : 3, 7 : 4, 9 : 5, 11 : 6 u. s. w.

Ent-

Enthält die größere Zahl die kleinere einmal und zwei ihrer Theile, wie bei 5 zu 3, so heißt dies ein überzweitheiltes Verhältniß (ἐπιδιμερής).

Enthält die größere Zahl die kleinere einmal und drei ihrer Theile, wie bei 7 zu 4, so heißt dies ein überdreitheiltes Verhältniß (ἐπιτριμερής).

Enthält die größere Zahl die kleinere einmal und vier ihrer Theile, wie bei 9 zu 5, so heißt dies ein überviertheiltes Verhältniß (ἐπιτετραμερής) u. s. w.

d. Von den vielfachübertheiligen Verhältnissen.

Die vielfachübertheiligen Verhältnisse sind aus den vielfachen und *übertheiligen* Verhältnissen zusammengesetzt. Es ist demnach ein vielfachübertheiliges Verhältniß (πολλαπλασιεπιμόριος) ein solches, wo die größere Zahl die kleinere mehrere Male und einen ihrer Theile in sich faßt.

Enthält die größere Zahl die kleinere zweimal und den dritten Theil, wie bei 7 zu 3, so heißt dies ein doppeltüberdrittes Verhältniß (διπλασιεπίτριτος).

Enthält die größere Zahl die kleinere dreimal und den dritten Theil, wie bei 10 zu 3, so heißt dies ein dreifachüberdrittes Verhältniß (τριπλασιεπίτριτος).

Enthält die größere Zahl die kleinere dreimal und den vierten Theil, wie bei 13 zu 4, so heißt dies ein dreifachüberviertes Verhältniß (τριπλασιεπιτέταρτος) u. s. w.

e. Von den vielfachübertheilten Verhältnissen.

Die vielfachübertheilten Verhältnisse sind aus den vielfachen und übertheilten Verhältnissen zusammengesetzt. Es ist demnach ein vielfachübertheiltes Verhältniß (πολλαπλασιεπιμερὴς) ein solches, wo die größere Zahl die kleinere mehrere Male und noch einige ihrer Theile in sich faßt.

Enthält die größere Zahl die kleinere zweimal und drei ihrer Theile, wie bei 11 zu 4, so heißt dies ein doppeltüberdreitheiltes Verhältniß (διπλασιεπιτριμερὴς).

Enthält die größere Zahl die kleinere dreimal und drei ihrer Theile, wie bei 15 zu 4, so heißt

dies ein dreifachüberdreitheiltes Verhältniß (τριπλασιεπιτριμερὴς).

Enthält die größere Zahl die kleinere dreimal und vier ihrer Theile, wie bei 19 zu 5, so heißt dies ein dreifachüberviertheiltes Verhältniß (τριπλασιεπιτετραμερὴς) u. s. w.

12.

Von der abgesonderten und stetigen Verhältnißfolge.

Boeth. de Mus. lib. 1. cap. 6. Jamblich. in Nicom. Arithm. p. 59.

Die abgesonderte Verhältnißfolge wird durch die vielfachen, die *stetige* Verhältnißfolge durch die übertheiligen Verhältnisse gebildet. Abgesondert aber heißt was in der Abnahme beschränkt, stetig was in der Zunahme beschränkt ist (9.). Es fängt demnach die abgesonderte Verhältnißfolge, mit dem kleinsten vielfachen Verhältniß 2 zu 1 an, und schreitet zunehmend, wie 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1, 5 : 1, u. s. w. ins Unendliche fort. Die stetige Verhältnißfolge hingegen, fängt mit dem größten

übertheiligen Verhältniß 3 zu 2 an, und schreitet abnehmend, wie 3 : 2, 4 : 3, 5 : 4, 6 : 5 u. s. w. ebenfalls ins Unendliche fort.

13.

Erklärung der Abnahme der stetigen Verhältnißfolge.

Alle Vorderglieder der übertheiligen Verhältnisse — woraus die stetige Folge gebildet wird — sind um die Einheit größer als ihre Hinterglieder (12.); demohngeachtet aber ist 3 zu 2 größer als 4 zu 3, und 4 zu 3 größer als 5 zu 4 u. s. w. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen, denn die überragende Einheit bei 3 zu 2 ist eine Hälfte, bei 4 zu 3 ein Drittel, bei 5 zu 4 ein Viertel u. s. w. Nicht so leicht aber ist einzusehen, wie die Einheit eine Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein Fünftel u. s. w. sein kann, ohne daß ihre eigenthümliche Größe weder einer Zunahme noch einer Abnahme fähig ist. Denn könnte die Einheit wirklich vergrößert und verkleinert werden, so müßte sie nothwendig auch Theile haben, folglich theilbar sein;

aber das ist sie nicht (4.). An und für sich sind also alle Theile von gleicher Größe, das Zweitel nicht größer als das Drittel, das Drittel nicht größer als das Viertel, und so die andern. Ihr Größenunterschied ist daher nur vergleichungsweise vorhanden. Ein praktisches Beispiel wird dies anschaulich machen. Ich nehme eine Wage und lege in jede Schale derselben 2 Pfund. Füge ich jezt zu den 2 Pfunden der einen Schale noch ein drittes Pfund, so wird diese mit Schnelligkeit sinken, denn sie ist durch das hinzugekommene Pfund um die Hälfte schwerer geworden als die andere Schale. Lege ich in jede Schale 3 Pfund, und füge zu den 3 Pfunden der einen Schale noch ein viertes Pfund, so wird sie schon weniger schnell sinken, denn sie ist durch das hinzugekommene Pfund, nur um den dritten Theil schwerer geworden als die andere Schale. Lege ich aber in jede Schale 1000 Pfund, und vergrößere die Last der einen Schale noch um ein Pfund, so wird sich diese kaum bewegen, denn sie ist durch das hinzugekommene Pfund, nur um den tausendsten Theil schwerer geworden als die andere Schale. — So wie nun im erstern Fall das Pfund eine Hälfte, im

letztern ein Tausendtheil ist, ohne daß sein Gewicht verändert worden; so ist auch die überragende Einheit, bei den übertheiligen Verhältnissen, beständig dieselbe, und ihr Größenunterschied folglich nur vergleichungsweise vorhanden.

14.

Lehrsätze von Verhältnissen.

a. Wenn bei zwei ungleichen Zahlen, das Kleinere immerfort vom Größern genommen wird, und keiner der Uiberschüsse, bis nicht die Einheit erreicht worden, den vorhergehenden mißt; so haben solche Zahlen ein Urverhältniß zu einander.

Euclid. Elem. lib. 7. prop. 1.

$$8 : 5$$

Zahlen die ein Urverhältniß zu einander haben, wie 8 zu 5, werden nur von der Einheit gemessen (11.). Hätten nun aber 8 und 5 kein Urverhältniß zu einander, so müßten sie irgend eine Zahl zum gemeinsamen Maaße haben. Diese Zahl sei B, und es lasse 8 von 5 gemessen den Uiberschuß 3,

5) 8 || 1
5

3

5 von 3 gemessen den Uiberschuß 2,

3) 5 || 1
3

2

und 3 von 2 gemessen den Uiberschuß 1.

2) 3 || 1
2

1

Da nun B die 5, und 5 die Maaßzahl 5 mißt; so mißt auch B die Maaßzahl 5, aber auch das Ganze 8, folglich den Uiberschuß 3.

Da B den Uiberschuß 3, und der Uiberschuß 3 die Maaßzahl 3 mißt; so mißt auch B die Maaßzahl 3, aber auch das Ganze 5, folglich den Uiberschuß 2.

Da B den Uiberschuß 2, und der Uiberschuß 2 die Maaßzahl 2 mißt; so mißt auch B die Maaßzahl 2, aber auch das Ganze 3, folglich den Uiberschuß 1. Also eine Zahl die Einheit, was unmöglich ist (3. a.).

Demnach haben 8 und 5 keine Zahl zum gemeinsamen Maaße, und es ist also 8 zu 5 ein Urverhältniß. Was zu beweisen war.

b. Für zwei gegebene Zahlen, welche kein Urverhältniß zu einander haben, das größte gemeinsame Maaß zu finden.

Elem. lib. 7. prop. 2.

8 : 4 , 10 : 6

Mißt die kleinere Zahl die größere, wie bei 8 zu 4, so ist 4, da sie auch sich selbst mißt, das gemeinsame Maaß von 4 und 8. Offenbar aber auch das größte, da 4 von keiner größern Zahl als 4 gemessen werden kann (3. a.).

Wird aber die größere Zahl von der kleinern nicht gemessen, wie bei 10 zu 6, und man nimmt immerfort das Kleinere vom Größern, so kommt man endlich einmal auf einen Uiberschuß, der den vorhergehenden mißt. Da aber 10 zu 6 kein Urverhältniß ist, so wird dieser Uiberschuß nicht die Einheit (14. a.), sondern eine Zahl sein. Es lasse demnach 10 von 6 gemessen den Uiberschuß 4,

6) 10 || 1
   6
   ―
   4

und 6 von 4 gemessen den Uiberschuß 2.

4) 6 || 1
   4
   ―
   2

Da nun 2 den Uiberschuß 4, und der Uiberschuß 4 die Maaßzahl 4 mißt; so mißt auch 2 die Maaßzahl 4, aber auch sich selbst, folglich das Ganze 6.

Da 2 das Ganze 6, und das Ganze 6 die Maaßzahl 6 mißt; so mißt auch 2 die Maaßzahl 6, aber auch den Uiberschuß 4, folglich das Ganze 10. Es ist demnach 2 das gemeinsame Maaß von 10 und 6.

Wäre nun aber 2 nicht auch das größte gemeinsame Maaß von 10 und 6, so sei es eine größere Zahl als 2. Diese heiße B.

Da B die 6, und 6 die Maaßzahl 6 mißt; so mißt auch B die Maaßzahl 6, aber auch das Ganze 10, folglich den Uiberschuß 4.

Da B den Uiberschuß 4, und der Uiberschuß 4 die Maaßzahl 4 mißt; so mißt auch B die Maaßzahl 4, aber auch das Ganze 6, folglich den Uiberschuß 2. Also die größere Zahl die kleinere, was unmöglich ist (3. a.).

Demnach werden 10 und 6 von keiner größern Zahl als 2 gemessen, und es ist also 2 ihr größtes gemeinsames Maaß. Was zu beweisen war.

Zusatz.

Hieraus geht hervor, daß eine Zahl, welche zwei Zahlen mißt, auch das größte gemeinsame Maaß derselben messe.

c. Für drei gegebene Zahlen, welche kein Urverhältniß zu einander haben, das größte gemeinsame Maaß zu finden.

Elem. lib. 7. prop. 3.

16 : 12 : 8 , 12 : 8 : 6

Sind drei Zahlen gegeben, und man sucht das größte gemeinsame Maaß der erstern beiden

(14. b.), so mißt dieses entweder auch die dritte Zahl, oder es mißt sie nicht. Findet der erstere Fall Statt, wie bei 16, 12, 8, so mißt 4, als das größte gemeinsame Maaß von 16 und 12, auch die dritte Zahl 8. Es ist also 4 das gemeinsame Maaß von 16, 12 und 8. Wäre nun aber 4 nicht auch ihr größtes gemeinsames Maaß, so sei es eine größere Zahl als 4. Diese heiße B. Da nun B alle drei gegebenen Zahlen, also auch die beiden erstern 16, 12, mißt; so mißt sie auch deren größtes gemeinsames Maaß (14. b. Zusatz.). Aber das größte gemeinsame Maaß von 16 und 12 ist 4. Folglich mißt B die 4. Also die größere Zahl die kleinere, was unmöglich ist. Demnach werden 16, 12 und 8 von keiner größern Zahl als 4 gemessen, und es ist also 4 ihr größtes gemeinsames Maaß.

Mißt 4 nicht die dritte Zahl, wie bei 12, 8, 6, so ist zunächst darzuthun, daß 4 und 6 kein Urverhältniß zu einander haben können. Da aber die gegebenen Zahlen kein Urverhältniß zu einander haben, so werden sie von irgend einer Zahl gemessen; und diese Zahl wird, da sie alle drei Zahlen mißt, auch die beiden erstern 12 und 8 messen,

folglich auch deren größtes gemeinsames Maaß 4 (14. b. Zusatz.). Demnach werden 4 und 6 von irgend einer Zahl gemessen, und haben daher kein Urverhältniß zu einander. Jetzt nehme man von 4 und 6 das größte gemeinsame Maaß 2 (14. b.). Da nun 2 die 4, und 4 die beiden erstern Zahlen 12 und 8 mißt, so mißt auch 2 die 12 und 8, aber auch die 6; folglich alle drei gegebenen Zahlen. Es ist demnach 2 das gemeinsame Maaß von 12, 8 und 6. Wäre nun aber 2 nicht auch ihr größtes gemeinsames Maaß, so sei es eine größere Zahl als 2. Diese heiße B. Da B alle drei gegebenen Zahlen mißt, also auch die beiden erstern 12 und 8, so mißt sie auch ihr größtes gemeinsames Maaß 4; aber auch die letzte Zahl 6. Demnach mißt B die 4 und 6, folglich auch deren größtes gemeinsames Maaß (14. b. Zusatz.). Aber das größte gemeinsame Maaß von 4 und 6 ist 2. Folglich mißt B die 2. Also die größere Zahl die kleinere, was unmöglich ist. Demnach werden 12, 8 und 6 von keiner größeren Zahl als 2 gemessen, und es ist also 2 ihr größtes gemeinsames Maaß. Was zu beweisen war.

Zusatz.

Hieraus geht hervor, daß eine Zahl, welche drei Zahlen mißt, auch das größte gemeinsame Maaß derselben messe.

Auch wird von mehreren gegebenen Zahlen das größte gemeinsame Maaß auf gleiche Art gefunden.

d. Jede kleinere Zahl enthält entweder Theile einer größern, oder ist selbst ein Theil der größern.

Elem. lib. 7. prop. 4.

5 : 8 , 4 : 8 , 6 : 10

Haben die beiden Zahlen ein Urverhältniß zu einander, wie 5 zu 8, und man zerlegt 5 in ihre Einheiten; so ist jede Einheit der 5 ein Theil der 8.

Haben aber die beiden Zahlen kein Urverhältniß zu einander, so wird entweder die größere Zahl von der kleineren gemessen, oder nicht gemessen.

Wird die größere Zahl von der kleinern gemessen, wie bei 4 zu 8, so ist 4 ein Theil der 8 (3. d.).

Wird hingegen die größere Zahl von der kleinern nicht gemessen, wie bei 6 zu 10, so nehme man beider größtes gemeinsames Maaß 2 (14. b.), und zerlege 6 in ihre — der 2 gleichen — Theile. Da nun 2 die 10 mißt, so ist 2 ein Theil der 10, folglich auch jeder Theil der 6 ein Theil der 10. Es enthält demnach jede kleinere Zahl entweder Theile einer größern, oder ist selbst ein Theil der größern. Was zu beweisen war.

e. Haben zwei Zahlen dasselbe Verhältniß zu einander, wie zwei andere Zahlen; so hat auch verwechselt, die erste zur dritten dasselbe Verhältniß, wie die zweite zur vierten.

Elem. lib. 7. prop. 9.

4 : 8

5 : 10

Da 4 zu 8 gleich ist 5 zu 10, so ist 4 ein solcher Theil von 8, als 5 von 10. Nun aber enthält 8 die 4 zweimahl, daher 10 die 5 eben so oft. Diesem zufolge ist die Hälfte von 8 zur Hälften von 10 gleich 4 zu 5; folglich auch die

ganze 8 zur ganzen 10. Es ist also, da 4 zu 8 gleich ist 5 zu 10, auch verwechselt (ἐναλλὰξ) 4 zu 5 gleich 8 zu 10. Was zu beweisen war.

f. Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen vervielfältigt, so verhalten sich die Erzeugnisse wie die vervielfältigten Zahlen.

Elem. lib. 7. prop. 17.

$$\begin{array}{c} 3 : 4 \\ 2 \\ \hline 6 : 8 \end{array}$$

Da 3 durch 2 vervielfältigt 6, und 4 durch 2 vervielfältigt 8 macht, so mißt 3 die 6 und 4 die 8 nach den Einheiten welche in 2 enthalten sind. Es mißt aber auch 1 die 2 nach den Einheiten, welche in ihr selbst enthalten sind. Daher mißt 1 die 2 nach denselben Einheiten, nach welchen 3 die 6 mißt. Folglich ist 1 zu 2 gleich 3 zu 6, und aus denselben Gründen auch 1 zu 2 gleich 4 zu 8. Folglich ist 3 zu 6 gleich 4 zu 8, und verwechselt (14. e.) 3 zu 4 gleich 6 zu 8. Was zu beweisen war.

g. Die kleinsten Zahlen zu finden, welche mit mehreren gegebenen Zahlen einerlei Verhältniß haben.

Elem. lib. 7. prop. 35.

2) 6 : 8 : 10 ‖ 3 : 4 : 5

Z) 6 : 8 : 10 ‖ B : C : D

Haben die gegebenen Zahlen ein Urverhältniß zu einander, so sind sie bereits die kleinsten in ihrer Art. Haben sie aber kein Urverhältniß zu einander, wie 6, 8, 10, so nehme man ihr größtes gemeinsames Maaß 2 (14. c.). Da nun 2 die gegebenen Zahlen 6, 8, 10 nach den Einheiten mißt, welche in 3, 4 und 5 enthalten sind, und die Zahlen 3, 4, 5 wiederum die gegebenen Zahlen nach den Einheiten messen, welche in 2 enthalten sind; so haben 3, 4 und 5 mit den gegebenen Zahlen 6, 8, 10 einerlei Verhältniß (14. f.). Wären nun 3, 4 und 5 nicht auch die kleinsten Zahlen in diesem Verhältniß, so mögen es kleinere sein als diese, und B, C, D heißen.

Da B, C, D die gegebenen Zahlen 6, 8, 10 nach den Einheiten messen, welche in Z enthalten sind, so mißt wiederum Z die gegebenen Zahlen nach den Einheiten, welche in B, C, D enthalten

sind.

sind. Es wird demnach, sowohl Z mal B als 2 mal 3 das Erzeugniß 6 geben. Nun aber ist nach dem Angenommenen B kleiner als 3, folglich Z größer als 2. Es würden also diesem zufolge 6, 8, 10 von einer noch größeren Zahl als 2 gemessen, was nicht möglich ist. Demnach giebt es keine kleinere Zahlen als 3, 4, 5, welche mit den gegebenen Zahlen 6, 8, 10 einerlei Verhältniß haben, und es sind also 3, 4 und 5 die kleinsten Zahlen in diesem Verhältniß. Was zu beweisen war.

h. Die kleinste Zahl zu finden, welche von zwei gegebenen Zahlen gemessen wird.

Elem. lib. 7. prop. 36.

3 : 4	4 : 6
12	2 : 3
	12
Z	Z
B : D	B : D

Haben die gegebenen Zahlen ein Urverhältniß zu einander wie 3 zu 4, so ist 12, als das Er-

zeugniß von 3 mal 4, die gesuchte Zahl welche von 3 und 4 gemessen wird. Wäre nun 12 nicht auch die kleinste von 3 und 4 meßbare Zahl, so sei es eine kleinere als 12. Diese heiße Z, und es messe 3 die Z nach den Einheiten, welche in D, und 4 messe die Z nach den Einheiten, welche in B enthalten sind. Folglich ist sowohl 3 mal D als 4 mal B gleich Z, und daher 3 zu 4 gleich B zu D. Da nun 3 und 4 die kleinsten Zahlen in dem Verhältniß wie B zu D sind, so wird 3 die B messen, und da 4 mal 3 gleich 12, und 4 mal B gleich Z ist, so ist 12 zu Z gleich 3 zu B (14. f.). Aber 3 mißt die B, folglich auch 12 die Z. Also die größere Zahl die kleinere, was unmöglich ist. Demnach giebt es keine kleinere Zahl als 12, welche von 3 und 4 gemessen wird, und es ist also 12 die kleinste von 3 und 4 meßbare Zahl.

Haben die beiden gegebenen Zahlen kein Urverhältniß zu einander, wie 4 zu 6, und man nimmt 2 und 3 als die kleinsten Zahlen in dem Verhältniß wie 4 zu 6 (14. g.), so ist 3 mal 4 gleich 2 mal 6. Aber 3 mal 4 ist 12, folglich auch 2 mal 6. Es ist also 12 die

gesuchte Zahl, welche von 4 und 6 gemessen wird. Wäre nun 12 nicht auch die kleinste von 4 und 6 meßbare Zahl, so sei es eine kleinere als 12. Diese heiße Z, und es messe 4 die Z nach den Einheiten, welche in D, und 6 messe die Z nach den Einheiten, welche in B enthalten sind. Folglich ist sowohl 4 mal D als 6 mal B gleich Z, und daher 4 zu 6 gleich B zu D. Aber 4 zu 6 ist gleich 2 zu 3, folglich auch 2 zu 3 gleich B zu D. Ferner weil 2 und 3 die kleinsten Zahlen in dem Verhältniß wie B zu D sind, so wird 2 die B messen, und da 6 mal 2 gleich 12, und 6 mal B gleich Z ist, so ist 12 zu Z gleich 2 zu B. Aber 2 mißt die B, folglich auch 12 die Z. Also die größere Zahl die kleinere, was unmöglich ist. Demnach giebt es keine kleinere Zahl als 12, welche von 4 und 6 gemessen wird, und es ist also 12 die kleinste von 4 und 6 meßbare Zahl. Was zu beweisen war.

i. Die kleinste Zahl zu finden, welche von drei gegebenen Zahlen gemessen wird.

Elem. lib. 3. prop. 38.

3 : 4 : 6	3 : 4 : 7
12	12, 84
Z	Z

Sind drei Zahlen gegeben, und man sucht die kleinste meßbare Zahl der ersteren beiden (14. h.), so wird diese entweder auch von der dritten Zahl gemessen oder nicht gemessen. Findet der erstere Fall Statt, wie bei 3, 4, 6, so wird 12, als die kleinste von 3 und 4 meßbare Zahl, auch von der dritten Zahl 6, folglich von allen drei gegebenen Zahlen 3, 4 und 6 gemessen. Wäre nun 12 nicht auch die kleinste von 3, 4, 6 meßbare Zahl, so sei es eine kleinere als 12. Diese heiße Z. Da nun alle drei gegebenen Zahlen die Z messen, so werden dies auch die ersteren beiden 3 und 4 thun, aber auch die kleinste von 3 und 4 meßbare Zahl wird die Z messen. Denn wenn von zweien Zahlen eine andere Zahl gemessen wird, so wird diese auch von der mit beiden meßbaren kleinsten Zahl gemessen. Aber die kleinste von 3 und 4 meßbare

Zahl ist 12, folglich mißt 12 die Z. Also die größere Zahl die kleinere, was unmöglich ist. Demnach giebt es keine kleinere Zahl als 12, welche von 3, 4, 6 gemessen wird, und es ist also 12 die kleinste von 3, 4 und 6 meßbare Zahl.

Mißt die dritte Zahl nicht die 12, wie bei 3, 4, 7, so nehme man 84, als die kleinste von 12 und 7 meßbare Zahl (14. h.). Da nun 3 und 4 die 12 messen, und 12 die 84 mißt, so messen auch 3 und 4 die 84. Aber auch 7 mißt die 84; folglich messen alle drei gegebenen Zahlen 3, 4 und 7 die 84. Wäre nun 84 nicht auch die kleinste von 3, 4, 7 meßbare Zahl, so sei es eine kleinere als 84. Diese heiße Z. Da nun alle drei gegebenen Zahlen die Z messen, so werden dies auch die ersteren beiden 3 und 4 thun, aber auch die kleinste von 3 und 4 meßbare Zahl, wird die Z messen. Doch die kleinste von 3 und 4 meßbare Zahl ist 12; folglich mißt 12 die Z. Aber auch 7 mißt die Z, und da 12 und 7 die Z messen, so mißt auch die kleinste von 12 und 7 meßbare Zahl die Z. Aber die kleinste von 12 und 7 meßbare Zahl ist 84; folglich mißt 84 die Z. Also die größere Zahl die kleinere, was un-

möglich ist. Demnach giebt es keine kleinere Zahl als 84, welche von 3, 4, 7 gemessen wird, und es ist also 84 die kleinste von 3, 4 und 7 meßbare Zahl. Was zu beweisen war. — Auf gleiche Art findet man auch die kleinste meßbare Zahl von mehreren gegebenen Zahlen.

15.

Von den Gleichverhaltungen.

Nicomach Geras. lib. 2. p. 40. Euclid. Elem. lib. 5. defin. 8 et 9. Theon. smyrn. de Mus. cap. 31. Psell. Arithm. p. 10.

Eine Gleichverhaltung (ἀναλογία) ist die Gleichheit der Verhältnisse, und besteht zwischen drei Gliedern zum wenigsten. Die Gleichverhaltungen werden eingetheilt:

a) in stetige

b) in abgesonderte,

c) in nebengesetzte, und

d) in entgegengesetzte.

a. Von den stetigen Gleichverhaltungen.

Elem. lib. 9. prop. 8.

In stetiger Gleichverhaltung sind Zahlen, wenn die erste und zweite, die zweite und dritte, die dritte und vierte u. s. w. einerlei Verhältniß zu einander haben. Solche Gleichverhaltungen sind 4 : 6 : 9 oder 1 : 3 : 9 : 27 : 81 u. a. m.

b. Von den abgesonderten Gleichverhaltungen.

Elem. lib. 7. prop. 12.

In abgesonderter Gleichverhaltung sind Zahlen, wenn die erste und zweite, die dritte und vierte, die fünfte und sechste u. s. w. einerlei Verhältniß zu einander haben. Solche Gleichverhaltungen sind 2 : 3 = 4 : 6 oder 3 : 5 = 6 : 10 = 12 : 20 u. a. m.

c. Von den nebengesetzten Gleichverhaltungen.

Elem. lib. 5. def. 19.

In nebengesetzter Gleichverhaltung (τεταγμένη) sind mehrere Zahlen mit eben so vielen andern,

wenn die erste und zweite von jenen mit der ersten und zweiten von diesen; die zweite und dritte von jenen, mit der zweiten und dritten von diesen u. s. w. einerlei Verhältniß haben. Solche Gleichverhaltungen sind 2 : 4 : 6 = 3 : 6 : 9 oder 2 : 4 : 6 : 8 : 10 : 16 = 3 : 6 : 9 : 12 : 15 : 24 u. a. m. Denn 2 zu 4 ist gleich 3 zu 6, 4 zu 6 gleich 6 zu 9, 6 zu 8 gleich 9 zu 12 u. s. w.

d. Von den entgegengesetzten Gleichverhaltungen.

Elem. lib. 5. defin. 20.

In entgegengesetzter Gleichverhaltung (τεταραγμένη) sind mehrere Zahlen mit eben so vielen andern, wenn die erste und zweite von jenen, mit der vorletzten und letzten von diesen; die zweite und dritte von jenen, mit der vorvorletzten und vorletzten von diesen u. s. w. einerlei Verhältniß haben. Solche Gleichverhaltungen sind 3 : 4 : 6 = 6 : 9 : 12 oder 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 10 : 12 : 15 : 20 : 30 : 60 u. a. m. Denn 1 zu 2 ist gleich 30 zu 60, 2 zu 3 gleich 20 zu 30, 3 zu 4 gleich 15 zu 20 u. s. w.

16.

Bildung stetiger Gleichverhaltungen in allen Verhältnissen.

Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 64. Boeth. Arithm. lib. 2. cap. 2. Euclid. Elem. lib. 8. prop. 2.

Die Griechen bedienten sich zur Bildung stetiger Gleichverhaltungen, der untenstehenden Schemaen. Alle Gleichverhaltungen in denselben bestehen von der Linken zur Rechten aus vielfachen, und von oben nach unten aus übertheiligen, vielfachübertheiligen, übertheilten oder vielfachübertheilten Verhältnissen. Berechnet werden sie auf folgende Art: Ich setze zuerst die beiden Verhältnisse, aus welchen die Gleichverhaltungen bestehen sollen, z. B. im ersten Schema von der Linken zur Rechten das dreifache Verhältniß 1 zu 3, und von oben nach unten das überdritte Verhältniß 3 zu 4. Hierauf werden die Anfangszahlen in den Ecken berechnet, welche da 4 zu 1 vierfach ist, alle untereinander vierfach sein müssen; ich sage daher 4 mal 4 ist 16, 4 mal 16 ist 64, 4 mal 64 ist 256 u. s. w. Dann berechne ich die Zahlen in der

obersten Reihe von 3 nach der Rechten zu, welche, da 3 zu 1 dreifach ist, alle untereinander dreifach sein müssen; ich sage daher 3 mal 3 ist 9, 3 mal 9 ist 27, 3 mal 27 ist 81 u. s. w. Die anderen Reihen eben so. Die erste dreifache Gleichverhaltung ist also 1 : 3 : 9, und die erste überdritte Gleichverhaltung 9 : 12 : 16.

Dreifache und überdritte Gleichverhaltungen.

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
	4	12	36	108	324	972	2916	8748
		16	48	144	432	1296	3888	11664
			64	192	576	1728	5184	15552
				256	768	2304	6912	20736
					1024	3072	9216	27648
						4096	12288	36864
							16384	49152
								65536

u. s. w.

Dreifache und überzweitheilte Gleichverhaltungen.

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
	5	15	45	135	405	1215	3645	10935
		25	75	225	675	2025	6075	18225
			125	375	1025	3075	9225	27675
				625	1875	5625	16875	50625
					3125	9375	28125	84375
						15625	46875	140625
							78125	234315
								390625

u. s. w.

Dreifache und doppeltüberdritte Gleichverhaltungen.

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
	7	21	63	189	567	1701	5103	15309
		49	147	441	1323	3969	11907	35721
			343	1029	3087	9261	27783	83349
				2401	7203	21609	64827	194481
					16807	50421	151263	453789
						117649	352947	1058841
							823543	2470629
								5764801

u. s. w.

Dreifache und doppeltüberzweitheilte Gleichverhaltungen.

1	3	9	27	81	143	729	2187	6561
	8	24	72	216	648	1944	5832	17496
		64	192	576	1728	5184	15552	46656
			512	1536	4608	13824	41472	124416
				4096	12288	36864	110592	331776
					32768	98304	294912	894736
						262144	786432	2359296
							2097152	6291456
								16777216

u. s. w.

Dreifache und dreifachüberdritte Gleichverhaltungen.

1	3	9	27	81	143	729	2187	6561
	10	30	90	270	810	2430	7290	21870
		100	300	900	2700	8100	24300	72900
			1000	3000	9000	27000	81000	243000
				10000	30000	90000	270000	810000
					100000	300000	900000	2700000
						1000000	3000000	9000000
							10000000	30000000
								100000000

u. s. w.

Dreifache und dreifachüberzweitheilte Gleichverhaltungen.

1	3	9	27	81	143	729	2187	6561
	11	33	99	297	891	2673	8019	24057
		121	363	1089	3267	9801	29403	88209
			1331	3993	11979	35937	107811	323433
				14641	43923	131769	395307	1185921
					161051	483153	1449459	4348377
						1771561	5214683	15644049
							19487171	58461513
								214358881

u. s. w.

17.

Lehrsätze von Gleichverhaltungen.

a. Sind mehrere Zahlen mit eben so vielen andern nebengesetzt gleichverhältig, so sind sie auch aus dem Gleichen gleichverhältig.

Euclid. Elem. lib. 7. prop. 14.

$$2 : 3 : 8 = 4 : 6 : 16$$

Da 2 zu 3 gleich ist 4 zu 6 (15. c.) so ist verwechselt 2 zu 4 gleich 3 zu 6 (14. e.). Ferner da 3 zu 8 gleich ist 6 zu 16, so ist verwechselt 3 zu 6 gleich 8 zu 16. Aber auch 3 zu 6 ist gleich 2 zu 4, und daher 2 zu 4 gleich 8 zu 16. Folglich aus dem Gleichen (δὶ ἴσου), 2 zu 8 gleich 4 zu 16. Was zu beweisen war.

b. Sind mehrere Zahlen mit eben so vielen andern entgegengesetzt gleichverhältig, so sind sie auch aus dem Gleichen gleichverhältig.

Elem. lib. 7. prop. 22.

$$2 : 3 : 6 = 4 : 8 : 12$$

Da 2 zu 3 gleich ist 8 zu 12 (15. d.), so ist 2 mal 12 gleich 3 mal 8. Ferner da 3 zu 6

gleich ist 4 zu 8, so ist 6 mal 4 gleich 3 mal 8. Aber auch 2 mal 12 ist gleich 3 mal 8, und 6 mal 4 gleich 2 mal 12. Folglich aus dem Gleichen, 2 zu 6 gleich 4 zu 12. Was zu beweisen war.

c. Zwischen zwei Viereckzahlen fällt eine mittlere Gleichverhaltungszahl, und das Verhältniß zweier Viereckzahlen ist doppelt so groß als das ihrer Seiten.

Elem. lib. 8. prop. 11.

4 : 6 : 9

2 : 3

Da 4 und 9 Viereckzahlen, und 2 und 3 ihre Seiten sind, so wird 2 mit sich selbst vervielfältigt 9 machen. Da nun 2 mal 2 gleich 4, und 2 mal 3 gleich 6 ist, so ist 4 zu 6 gleich 2 zu 3 (14. f.). Ferner da 3 mal 2 gleich 6, und 3 mal 3 gleich 9 ist, so ist 2 zu 3 gleich 6 zu 9. Nun aber ist auch 2 zu 3 gleich 4 zu 6, folglich 4 zu 6 gleich 6 zu 9. Demnach fällt zwischen 4 und 9 die mittlere Gleichverhaltungszahl 6.

Da nun die Zahlen 4, 6, 9 gleichverhältig sind, so ist das Verhältniß von 4 zu 9 doppelt

so groß, als das von 4 zu 6. Aber 4 zu 6 ist gleich 2 zu 3. Folglich ist das Verhältniß von 4 zu 9 doppelt so groß, als das der Seiten 2 zu 3. Was zu beweisen war.

d. Zwischen zwei Würfelzahlen fallen zwei mittlere Gleichverhaltungszahlen, und das Verhältniß zweier Würfelzahlen ist dreimal so groß als das ihrer Seiten.

Elem. lib. 8. prop. 12.

8 : 12 : 18 : 27

4 : 6 : 9

2 : 3

Da 8 und 27 Würfelzahlen, und 2 und 3 ihre Seiten sind, so wird 2 mit sich selbst vervielfältigt 4, und 4 mit 2 vervielfältigt 8 machen. Eben so wird 3 mit sich selbst vervielfältigt 9, und 9 mit 3 vervielfältigt 27 machen. Da nun 2 mal 2 gleich 4, und 2 mal 3 gleich 6 ist, so ist 2 zu 3 gleich 4 zu 6 (14. f.). Aus gleichen Gründen ist auch 2 zu 3 gleich 6 zu 9. Ferner da 2 mal 4 gleich 8, und 2 mal 6 gleich 12 ist, so ist 4 zu 6 gleich 8 zu 12. Wiederum da 6 mal 2 gleich

12, und 6 mal 3 gleich 18 ist, so ist 2 zu 3 gleich 12 zu 18. Ferner da 3 mal 6 gleich 18, und 3 mal 9 gleich 27 ist, so ist 6 zu 9 gleich 18 zu 27. Auch ist 6 zu 9 gleich 2 zu 3, und 2 zu 3 gleich 18 zu 27. Nun aber ist auch 2 zu 3 gleich 8 zu 12, und 12 zu 18 gleich 18 zu 27. Demnach fallen zwischen 18 und 27 die beiden mittleren Gleichverhaltungszahlen 12 und 18.

Da nun die vier Zahlen 8, 12, 18, 27 gleichverhältig sind, so ist das Verhältniß von 8 zu 27 dreimal so groß, als das von 8 zu 12. Aber 8 zu 12 ist gleich 2 zu 3. Folglich ist das Verhältniß von 8 zu 27 dreimal so groß als das der Seiten 2 zu 3. Was zu beweisen war.

e. Zwischen zwei ähnliche Flächenzahlen fällt eine mittlere Gleichverhaltungszahl, und das Verhältniß zweier ähnlicher Flächenzahlen ist doppelt so groß als das ihrer verwandten Seiten.

Elem. lib. 8. prop. 18.

12 : 24 : 48

3 : 4 = 6 : 8

Da 12 und 48 ähnliche Flächenzahlen sind, so haben sie gleichverhältige Seiten (5. c.). Es ist demnach 3 zu 4 gleich 6 zu 8, und verwechselt 3 zu 6 gleich 4 zu 8. Da also 12 eine Flächenzahl ist, deren Seiten 3 und 4 sind, so wird 3 durch 4 vervielfältigt 12 machen. Eben so wird auch 6 durch 8 vervielfältigt 48 machen. Da nun 4 mal 3 gleich 12, und 4 mal 6 gleich 24 ist, so ist 3 zu 6 gleich 12 zu 24 (14. f.). Aber 3 zu 6 ist gleich 4 zu 8, und daher 4 zu 8 gleich 12 zu 24. Ferner da 6 mal 4 gleich 24, und 6 mal 8 gleich 48 ist, so ist 4 zu 8 gleich 24 zu 48. Nun aber ist auch 4 zu 8 gleich 12 zu 24, und daher 12 zu 24 gleich 24 zu 48. Demnach fällt zwischen 12 und 48 die mittlere Gleichverhaltungszahl 24.

Da nun die Zahlen 12, 24, 48 gleichverhältig sind, so ist das Verhältniß von 12 zu 48 doppelt so groß, als das von 12 zu 24. Aber 12 zu 24 ist gleich 3 zu 6 und 4 zu 8. Folglich ist das Verhältniß von 12 zu 48 doppelt so groß als das der verwandten Seiten (ὁμολόγοι) 3 zu 6 oder 4 zu 8. Was zu beweisen war.

f. Zwischen zwei ähnliche Körperzahlen fallen zwei mittlere Gleichverhaltungszahlen, und das Verhältniß zweier ähnlicher Körperzahlen ist dreimal so groß als das ihrer verwandten Seiten.

Elem. lib. 8. prop. 19.

84 : 168 : 336 : 672

12 : 24 : 48

3 : 4 : 7 = 6 : 8 : 14

Da 84 und 672 Körperzahlen sind, so haben sie gleichverhältige Seiten (5. c.). Es ist demnach 3 zu 4 gleich 6 zu 8, und 4 zu 7 gleich 8 zu 14. Da also 84 eine Körperzahl ist, deren Seiten 3, 4 und 7 sind, so wird 3 durch 4 vervielfältigt 12, und 12 durch 7 vervielfältigt 48 machen. Eben so wird auch 6 durch 8 verviel-

fältigt 48, und 48 durch 14 vervielfältigt 672 machen. Da nun die Zahlen 12, 24, 48 gleichverhältig sind (17. e.), und 7 mal 12 gleich 84, und 7 mal 24 gleich 168 ist, so ist 12 zu 24 gleich 84 zu 168 (14. f.). Aber 12 zu 24 ist gleich 3 zu 6 und 4 zu 8 und 7 zu 14. Folglich ist auch 3 zu 6 und 4 zu 8 und 7 zu 14 gleich 84 zu 168. Ferner da 24 mal 7 gleich 168, und 24 mal 14 gleich 336 ist, so ist 7 zu 14 gleich 168 zu 336. Aber 7 zu 14 ist gleich 3 zu 6 und 4 zu 8, daher auch 3 zu 6 und 4 zu 8 gleich 84 zu 168 und 168 zu 336. Ferner da 14 mal 24 gleich 336, und 14 mal 48 gleich 672 ist, so ist 24 zu 48 gleich 336 zu 672. Aber 24 zu 48 ist gleich 3 zu 6 und 4 zu 8 und 7 zu 14. Daher sind 3 zu 6 und 4 zu 8 und 7 zu 14 nicht allein gleich 336 zu 672, sondern auch gleich 84 zu 168 und 168 zu 336. Demnach fallen zwischen 84 und 672 die beiden mittlern Gleichverhaltungszahlen 168 und 336.

Da nun die Zahlen 84, 168, 336, 672 gleichverhältig sind, so ist das Verhältniß von 84 zu 672 dreimal so groß als das von 84 zu 168. Aber 84 zu 168 ist gleich 3 zu 6 und 4 zu 8

und 7 zu 14. Folglich ist das Verhältniß von 84 zu 672 dreimal so groß als das der verwandten Seiten 3 zu 6 und 4 zu 8 und 7 zu 14. Was zu beweisen war.

18.

Von den Theilzahlen.

Barlaam. Logist. edit. Chamb. lib. 1. defin. Diophant. Arithm. lib. 1. defin. 3. Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 17. Eutoc. in Archim. dimens. circ. p. 547.

Jede ganze Zahl besteht, nachdem sie größer oder kleiner ist, aus mehr oder weniger Einheiten (5.). Die Zahl 2 besteht aus zwei Einheiten, und die einzelne Einheit heißt ein Zweitel; die Zahl 3 besteht aus drei Einheiten, und die einzelne Einheit heißt ein Drittel; die Zahl 4 besteht aus vier Einheiten, und die einzelne Einheit heißt ein Viertel u. s. w. Es hat demnach jede Zahl einen gleichnamigen Theil (*ὁμώνυμον μόριον*), die 2 das Zweitel, die 3 das Drittel, die 4 das Viertel, die 5 das Fünftel u. s. w. Die gleichnamigen Theile oder Theilzahlen — das

Zweitel ausgenommen — werden mit denselben Ziffern geschrieben wie die ganzen Zahlen, und sind nur dadurch von einander unterschieden, daß die Zahlen mit einem Querstrich (7.), die gleichnamigen Theile aber mit dem Acutus bezeichnet werden. So sind $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varsigma}$, $\bar{\zeta}$, $\bar{\eta}$, Zahlen, und γ', δ', ε', ς', ζ', η' ihre gleichnamigen Theile. Das Zweitel hat statt β' das Zeichen $\angle$.

Enthalten Theilzahlen mehrere Theile einer Zahl, so heißen sie unzerlegte Theilzahlen, die unzerlegten Theilzahlen werden mit zwei Ziffern von ungleicher Größe geschrieben, so daß die größere die Menge der Theile, die kleinere hingegen die Zahl, von welcher sie Theile sind, bezeichnet, z. B. $\bar{\beta}^{\gamma}$, $\bar{\gamma}^{\delta}$, $\bar{\delta}^{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}^{\varsigma}$, $\bar{\varsigma}^{\zeta}$, $\bar{\zeta}^{\eta}$ u. s. w. Ich werde die Theilzahlen mit unseren Ziffern, auf folgende Art bezeichnet, schreiben: die gleichnamigen Theilzahlen 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8' u. s. w. die unzerlegten Theilzahlen $2^{\underline{3}}$, $3^{\underline{4}}$, $4^{\underline{5}}$, $5^{\underline{6}}$, $6^{\underline{7}}$, $7^{\underline{8}}$, $8^{\underline{9}}$ u. s. w.

Die Theilzahlen nehmen mehrere Benennungen und Eigenschaften ihrer gleichnamigen ganzen Zahlen an, z. B. der gleichnamige Theil einer geraden Zahl, heißt ein gerader Theil (ἀρτιώνυμος),

der gleichnahmige Theil einer ungeraden Zahl, ein ungerader Theil (περιττώνυμος) u. s. w. Auch verhalten sich Theilzahlen — nur in umgekehrter Folge — wie ihre gleichnamige ganzen Zahlen zu einander, z. B. 3′ zu 2′ ist gleich 2 zu 3, 4′ zu 5′ ist gleich 3 zu 4 u. s. w.

Da die Einheiten einer Zahl — wie schon gesagt — der Zahl selbst gleichnamig sind; so bildet jedwede Zahl ein Ganzes, die 4 das Ganze $4^{\underline{4}}$, die 3 das Ganze $3^{\underline{3}}$, die 2 das Ganze $2^{\underline{2}}$. Zerlegt werden diese Ganze auf folgende Art:

$4^{\underline{4}}$ oder 1 Ganzes,
$3^{\underline{4}}$ oder 2′ und 4′ des Ganzen,
$2^{\underline{4}}$ oder 2′ des Ganzen,
$1^{\underline{4}}$ oder 4′ des Ganzen.

$3^{\underline{3}}$ oder 1 Ganzes,
$2^{\underline{3}}$ oder 2′ und 6′ des Ganzen,
$1^{\underline{3}}$ oder 3′ des Ganzen.

$2^{\underline{2}}$ oder 1 Ganzes,
$1^{\underline{2}}$ oder 2′ des Ganzen.

Uiber die Zahl 2 hinaus giebt es kein Ganzes mehr, denn die Einheit so wie der geometrische Punkt, sind Atome, d. h. Größen, die keine Theile haben; ein Ganzes aber ohne Theile ist nicht denkbar. Wenn es daher oben heißt: 4^4 oder ein Ganzes, so ist dies nicht so zu verstehen, als wäre 1 selbst ein Ganzes; sondern die Einheit steht hier wie immer als kleinster Theil der Menge, und zeigt an, daß die Zahl 4^4 nur ein Ganzes, und nicht etwa 2 oder mehrere Ganze begreift, und heißt daher soviel als 1 mal 4^4.

19.

Von der abgesonderten und stetigen Zahlenfolge.

Jamblich. in Nicomach. Arithm. p. 16.

Die abgesonderte Zahlenfolge wird durch die ganzen Zahlen, die stetige Zahlenfolge durch die Theilzahlen gebildet. Abgesondert aber heißt, wie schon gesagt (12.), was in der Abnahme beschränkt, stetig, was in der Zunahme beschränkt ist. Es

fängt demnach die abgesonderte Zahlenfolge mit der kleinsten ganzen Zahl 2 an, und schreitet zunehmend, wie 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w. ins Unendliche fort. Die stetige Zahlenfolge hingegen fängt mit der größten Theilzahl 2′ an, und schreitet abnehmend, wie 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′ u. s. w. ebenfalls ins Unendliche fort. Die stetige Zahlenfolge beruht übrigens auf denselben Grundsätzen wie die stetige Verhältnißfolge (13.).

20.

Vom Einmaleins.

Es giebt vier Gattungen des Einmaleins, nachdem entweder ganze Zahlen mit ganzen Zahlen, Theilzahlen mit Theilzahlen, ganze Zahlen mit Theilzahlen, oder Theilzahlen mit ganzen Zahlen vervielfältigt werden.

a. Erstes Einmaleins.

Nicomach. Geras. Arithm. lib. 1. p. 28.

Das erste Einmaleins wird durch die Vervielfältigung von ganzen Zahlen mit ganzen Zah-

len gebildet. Die Griechen bedienten sich hierzu des untenstehenden Schemas, welches nach seinem Erfinder der Pythagoreische Rechentisch (ἄβαξ) genannt wurde. Den Gebrauch desselben kennt Jedermann.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

b. Zweites Einmaleins.

Jamblich in Nicomach. Arithm. p. 17. Diophant. Arithm. defin. 7.

Das zweite Einmaleins wird durch die Vervielfältigung von Theilzahlen mit Theilzahlen gebildet, und ausgesprochen:

ein halb mal ein Zweitel ist ein Viertel,
ein halb mal ein Drittel ist ein Sechstel,
ein halb mal ein Viertel ist ein Achtel u. s. w.

2′ mal 2′ ist 4′	4′ mal 4′ ist 16′	6′ — 9′ — 54′
2′ — 3′ — 6′	4′ — 5′ — 20′	6′ — 10′ — 60′
2′ — 4′ — 8′	4′ — 6′ — 24′	
2′ — 5′ — 10′	4′ — 7′ — 28′	
2′ — 6′ — 12′	4′ — 8′ — 32′	7′ mal 7′ ist 49′
2′ — 7′ — 14′	4′ — 9′ — 36′	7′ — 8′ — 56′
2′ — 8′ — 16′	4′ — 10′ — 40′	7′ — 9′ — 63′
2′ — 9′ — 18′		7′ — 10′ — 70′
2′ — 10′ — 20′	5′ mal 5′ ist 25′	
	5′ — 6′ — 30′	
3′ mal 3′ ist 9′	5′ — 7′ — 35′	8′ mal 8′ ist 64′
3′ — 4′ — 12′	5′ — 8′ — 40′	8′ — 9′ — 72′
3′ — 5′ — 15′	5′ — 9′ — 45′	8′ — 10′ — 80′
3′ — 6′ — 18′	5′ — 10′ — 50′	
3′ — 7′ — 21′		
3′ — 8′ — 24′	6′ mal 6′ ist 36′	9′ mal 9′ ist 81′
3′ — 9′ — 27′	6′ — 7′ — 42′	9′ — 10′ — 90′
3′ — 10′ — 30′	6′ — 8′ — 48′	10′ — 10′ — 100′

c. Drittes Einmaleins.

Diophant. Arithm. defin. 5.

Das dritte Einmaleins wird durch die Vervielfältigung von ganzen Zahlen mit Theilzahlen gebildet, und ausgesprochen:

ein halb mal zwei ist eins,
ein halb mal vier ist zwei,
ein halb mal sechs ist drei u. s. w.

2′ mal 2 ist 1	3′ — 6 — 2	5′ — 10 — 2
2′ — 4 — 2	3′ — 9 — 3	
2′ — 6 — 3		6′ mal 6 ist 1
2′ — 8 — 4	4′ mal 4 ist 1	7′ — 7 — 1
2′ — 10 — 5	4′ — 8 — 2	8′ — 8 — 1
		9′ — 9 — 1
3′ mal 3 ist 1	5′ mal 5 ist 1	10′ — 10 — 1

d. Viertes Einmaleins.

Diophant. Arithm. defin. 5.

Das vierte Einmaleins wird durch die Vervielfältigung von Theilzahlen mit ganzen Zahlen gebildet, und ausgesprochen:

zwei mal ein Zweitel ist eins,
zwei mal ein Viertel ist ein Zweitel,
zwei mal ein Sechstel ist ein Drittel u. s. w.

2 mal 2′ ist 1	3 — 6′ — 2′	5 — 10′ — 2′
2 — 4′ — 2′	3 — 9′ — 3′	
2 — 6′ — 3′		6 mal 6′ ist 1
2 — 8′ — 4′	4 mal 4′ ist 1	7 — 7′ — 1
2 — 10′ — 5′	4 — 8′ — 2′	8 — 8′ — 1
		9 — 9′ — 1
3 mal 3′ ist 1	5 mal 5′ ist 1	10 — 10′ — 1

21.

Von der Theilung oder Messung der Zahlen.

Barlaam. Logist. lib. 2. Eutoc. comment. in Archim. dimens. circ. p. 547. Papp. Alexand. collectan. p. 597.

Es giebt vier Gattungen der Theilung: ganze Zahlen durch ganze Zahlen, Theilzahlen durch Theilzahlen, ganze Zahlen durch Theilzahlen, und Theilzahlen durch ganze Zahlen.

a. Theilung ganzer Zahlen durch ganze Zahlen.

Das Verhältniß zweier ungleicher Zahlen ist entweder vielfach, übertheilig, vielfach übertheilig, übertheilt oder vielfach übertheilt (11.), und eben so viel verschiedene Zahlentheilungen muß es daher auch geben.

π. Vielfache Theilung.

4) 12 ‖ 3
12

Vielfach ist eine Theilung, wenn die kleinere Zahl die größere erschöpft, wie bei 4 und 12; und es heißt in diesem Fall: 4 mißt die 12 nach der Zahl 3, oder vier in 12 habe ich 3 mal, denn 3 mal 4 ist 12. Es ist also 4 in 12 so vielmal enthalten, als Einheiten in 3 enthalten sind, und das Verhältniß der Zahlen 4 und 12 ist daher dreifach.

Setzt man das Verhältniß der Maaßzahl und zu messenden Zahl als Theilzahl, so giebt diese einen Gleichwerth des Enthaltes der Theilung. Es kann demnach bei obigem Beispiel $12^{\underline{4}}$ statt 3 gesetzt werden. Denn 3 heißt hier so viel als 3 Ganze oder 3 mal $4^{\underline{4}}$ (18.); aber 3 mal $4^{\underline{4}}$ und $12^{\underline{4}}$ ist eins und dasselbe. Dies gilt auch von allen folgenden Theilungen.

e. Uibertheilige Theilung.

6) 8 || 1 · 3'
6
―――
2
2
―――

Uibertheilig ist eine Theilung, wenn die kleinere Zahl die größere nicht erschöpft, sondern ein Theil derselben als Uiberschuß bleibt, wie bei 6 und 8; und es heißt in diesem Fall: 8 von 6 nach der Einheit gemessen läßt den Uiberschuß 2, oder 6 in 8 habe ich 1 mal, 1 mal 6 ist 6, bleiben 2 als Uiberschuß. Da nun der Uiberschuß allemal kleiner ist als die Maaßzahl, und das Größere nicht das Kleinere mißt, so wird auch die Maaßzahl 6 nicht den Uiberschuß 2 messen. Es sollte daher eigentlich das Verfahren umgewendet, und die Maaßzahl 6 durch den Uiberschuß 2 getheilt werden; denn da 2 in 6 dreimal enthalten ist, so ist 2 der dritte Theil von 6. Aber statt dieser Rechnungsart, hat man es bequemer gefunden zu sagen: 6 in 2 habe ich ein drittelmal, denn 3′ mal 6 ist 2 (20. c.) Es wird also der Uiberschuß 2 nicht mit der ganzen Maaßzahl 6, sondern mit dem dritten Theil derselben, gemessen; der dritte Theil aber von 6 ist 2, folglich werden die 2 Einheiten des Uiberschusses, durch zwei Einheiten der Maaßzahl gemessen. Das ganze Verfahren hintereinander heißt demnach: 6 in 8 habe ich 1 mal, 1 mal 6 ist 6, bleiben 2; 6 in 2 habe

ich 3′ mal, 3′ mal 6 ist 2. Es ist also 6 in 8 enthalten, einmal und ein drittelmal, und das Verhältniß der Zahlen 6 und 8 ist daher überdrittig. Noch ist zu bemerken, daß, da bei der übertheiligen Theilung, der Uiberschuß ein Theil der Maaßzahl ist, dieser auch allemal in der Maaßzahl aufgeht (3. d.). Hier noch einige Beispiele.

4) 5 ‖ 1 · 4′
4
———
1
1
———

52) 65 ‖ 1 · 4′
52
———
13
13
———

148) 185 ‖ 1 · 4′
148
———
37
37
———

Bei allen drei Beispielen liegt das über- vierte Verhältniß zu Grunde. Das Verhältniß des ersten Beispiels ist ein Urverhältniß, die andern beiden aber zusammengesetzt. Wenn nun beim ersten Beispiel gesagt wird: 4 in 1 habe ich 4′ mal, 4′ mal 4 ist 1, so heißt dies, daß der vierte Theil der Maaßzahl 4 den Uiberschuß 1 mißt; der vierte Theil von 4 aber ist ebenfalls 1, also wird die Einheit des Uiberschusses durch eine Einheit der Maaßzahl gemessen. Man erhält daher auch hier dasselbe, wenn man die Maaßzahl mit dem Uiberschusse theilt; denn da 1 in 4 viermal enthalten ist, so ist 1 der vierte Theil von 4. Demnach macht es in der Behandlung keinen Unterschied, ob der Uiberschuß die Einheit oder eine Zahl ist. Bei den andern beiden Beispielen heißt es: 52 in 13 habe ich 4′ mal, 4′ mal 52 ist 13; 148 in 37 habe ich 4′ mal, 4′ mal 148 ist 37 (20. c.).

σ. Vielfachübertheilige Theilung.

Die vielfachübertheilige Theilung ist nur dadurch von der vorigen unterschieden, daß die grö-

ßere Zahl die kleinere nicht einmal, sondern mehrere Male und noch einen ihrer Theile in sich faßt.

2) 13 ‖ 6 · 2′
12
—
1
1
—

30) 396 ‖ 13 · 5′
30
—
96
90
—
6
6
—

1. Ubertheilte Theilung.

4) 7 ‖ 1 · 2′ 4′
4
—
3
2
—
1
1
—

Uibertheilt ist eine Theilung, wenn die kleinere Zahl die größere nicht erschöpft, sondern zwei oder mehrere Theile derselben als Uiberschuß bleiben, wie bei 4 und 7. Da nun aber der Uiberschuß bei der übertheilten Theilung, mehr als einen Theil der Maaßzahl in sich faßt, so wird dieser unzerlegt niemals in der Maaßzahl aufgehen, und es muß daher die Theilung so lange fortgesezt werden, bis man auf einen Uiberschuß kommt, der die Maaßzahl mißt. In obigem Beispiel heißt es daher: 4 in 7 habe ich 1 mal, 1 mal 4 ist 4, bleiben 3; 4 in 3 habe ich 2′ mal, 2′ mal 4 ist 2, bleibt 1; 4 in 1 habe ich 4′ mal, 4′ mal 4 ist 1. Es ist also 4 in 7 enthalten, einmal, ein halbmal und ein viertelmal. Hier noch einige Beispiele.

3) 5 ‖ 1 ' 2³

3

———

2

6) 10 ‖ 1 · 2′ 6′

6

4

3

1

1

---

11) 20 ‖ 1 · 9 $\frac{11}{}$

11

9

Beim ersten Beispiel ist die Maaßzahl eine unzusammengesetzte Zahl, und daher die Theilung nicht zu vollenden. Soll aber demohngeachtet die Theilung ganz durchgeführt werden, so muß man die beiden Zahlen 3 und 5 vergrößern, wie dies beim zweiten Beispiel geschehen ist. Die Theilung des dritten Beispiels aber ist auf keine Weise bis zu Ende zu führen; denn wenn man auch 11 und 20 ins Unendliche vergrößert, so geht doch niemals der Uiberschuß — in was für kleine Zahlen er auch zerlegt werden mag — in der Maaßzahl auf, und es ist daher 20 durch 11 ganz unmeßbar.

v. Vielfachübertheilte Theilung.

Die vielfachübertheilte Theilung ist nur dadurch von der vorigen unterschieden, daß die größere Zahl die kleinere nicht einmal, sondern mehrere Male und noch einige ihrer Theile in sich faßt.

```
20) 175 || 8 · 2' 4'
    160
    ---
     15
     10
    ---
      5
      5
    ---

1272) 13939 || 10 · 2' 3' 8'
      12720
      -----
       1219
        636
      -----
        583
        424
      -----
        159
        159
      -----
```

b. Theilung der Theilzahlen durch Theilzahlen.

Theilzahlen verhalten sich umgekehrt zu einander wie ihre gleichnamigen ganzen Zahlen (18.). Es geben daher bei der Theilung, die Theilzahlen dieselben Enthalte, wie ihre gleichnamigen ganzen Zahlen.

6') 3' ‖ 2	3) 6 ‖ 2
3'	6
—	—
3') 2' ‖ 1 · 2'	2) 3 ‖ 1 · 2'
3'	2
6'	1
6'	1
—	—
5') 4' ‖ 1 · 4'	4) 5 ‖ 1 · 4'
5'	4
20'	1
20'	1
—	—

Die Theilung der Theilzahlen ist demnach von der Theilung der ganzen Zahlen nur in der Behandlung verschieden, indem die Theilung der Theilzahlen nach dem zweiten und vierten Einmaleins (20.), die Theilung der ganzen Zahlen hingegen, nach dem ersten und dritten Einmaleins geschieht. Es heißt daher im ersten Beispiel: 6′ in 3′ habe ich 2 mal, 2 mal 6′ ist 3′. Im zweiten Beispiel heißt es: 3′ in 2′ habe ich 1 mal, 1 mal 3′ ist 5′, bleibt 6′ als Uiberschuß; 3′ in 6′ habe ich 2′ mal, 2′ mal 3′ ist 6′. Das dritte Beispiel eben so. Da aber die Theilzahlen dieselben Enthalte, wie ihre gleichnamigen ganzen Zahlen geben, so kann diese Theilung sehr erleichtert werden, wenn man die Folge der Theilzahlen umkehrt, und sie alsdann wie ganze Zahlen behandelt.

$$20' : 15' = 15)\ 20 \,\|\, 1 \cdot 3'$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 5 \\ 5 \\ \hline \end{array}$$

$21' : 12' = 12)\ 21 \parallel 1 \cdot 2'\ 4'$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 9 \\ 6 \\ \hline 3 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Sollen unzerlegte Theilzahlen durch unzerlegte Theilzahlen getheilt werden, so geschieht dies, wenn man das Verhältniß derselben in ganzen Zahlen darstellt, und nun diese statt der gegebenen Theilzahlen theilt. Das Verhältniß zweier unzerlegter Theilzahlen aber findet man, wenn man den Nenner der größern durch den Zähler der kleinern, und den Zähler der größern durch den Nenner der kleinern, vervielfältigt. Die erste Vervielfältigung giebt die Maaßzahl, die andere die zu messende Zahl.

$2^{3} : 8^{2} = 18)\ 24 \parallel 1 \cdot 3'$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \hline 6 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$4^{\underline{7}} : 3^{\underline{4}} = 16)\ 21 \ \| \ 1 \cdot 4'\ 16'$

$$
\begin{array}{r}
16 \\
\hline
5 \\
4 \\
\hline
1 \\
1 \\
\hline
\end{array}
$$

Es heißt daher im ersten Beispiel: 2 mal 9 ist 18, 3 mal 8 ist 24. Das Verhältniß von $2^{\underline{3}}$ zu $8^{\underline{2}}$ ist demnach gleich 18 zu 24, und da 18 in 24 enthalten ist, einmal und ein drittelmal; so ist $2^{\underline{3}}$ in 8^{9} enthalten eben so oft. Das zweite Beispiel wie das erste.

c. Theilung ganzer Zahlen durch Theilzahlen.

Um zu erfahren, wie oft eine Theilzahl in einer ganzen Zahl enthalten ist, betrachtet man beide als ganze Zahlen, und vervielfältigt sie nach dem ersten Einmaleins mit einander, wo sodann das Erzeugniß der Vervielfältigung den Enthalt giebt.

3') 3 ‖ 9
3
———

3') 8 ‖ 24
8
———

Regelmäßig aber geschieht diese Theilung, wenn ich sage: 3′ in 3 habe ich 9 mal, 9 mal 3′ ist 3. Das andere Beispiel eben so.

Sollen ganze Zahlen durch unzerlegte Theilzahlen getheilt werden, so geschieht dies, wenn man das Verhältniß derselben in ganzen Zahlen darstellt, und nun diese statt der gegebenen Zahlen theilt. Das Verhältniß von unzerlegten Theilzahlen zu ganzen Zahlen aber findet man, wenn man den Zähler der gegebenen Theilzahl zur Maaßzahl nimmt, den Nenner mit der ganzen Zahl vervielfältigt, und das Erzeugniß der Vervielfältigung als die zu messende Zahl setzt.

$3^{1} : 4 =$ 3) 28 ‖ 9 · 3′
27
———
1
1
———

$4^{\underline{2}} : 7 = 4)\ 63 \,\|\, 15 \cdot 2'\ 4'$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 23 \\ 20 \\ \hline 3 \\ 2 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Es heißt daher im ersten Beispiel: 3 ist 3, 4 mal 7 ist 28. Das Verhältniß von $3^{\underline{1}}$ zu 4 ist demnach gleich 3 zu 28, und da 3 in 28 enthalten ist, neunmal und ein drittelmal, so ist $3^{\underline{1}}$ in 4 enthalten eben so oft. Das zweite Beispiel wie das erste.

d. Theilung der Theilzahlen durch ganze Zahlen.

Wenn es heißt Theilzahlen durch ganze Zahlen theilen, so ist dies bloß ein Sprachgebrauch, in der Ausführung aber unmöglich; denn ganze Zahlen sind größer als Theilzahlen, und das Größere mißt nicht das Kleinere (3. a.) Wir dürfen

daher hier nicht fragen, wie oft die ganze Zahl in der Theilzahl enthalten sei, sondern welcher Theil der ganzen Zahl die Theilzahl messe. Dies erfahren wir, wenn wir beide gegebenen Zahlen als Theilzahlen betrachten, und sie nach dem zweiten Einmaleins vervielfältigen, wo sodann das Erzeugniß der Vervielfältigung den Enthalt giebt.

3) 3′ ‖ 9′
3′

3) 8′ ‖ 24′
8′

Regelmäßig aber geschieht diese Theilung, wenn ich sage: 3 in 3′ habe ich 9′ mal, 9′ mal 3 ist 3′. Das andere Beispiel eben so.

Sollen unzerlegte Theilzahlen durch ganze Zahlen getheilt werden, so geschieht dies, wenn man das Verhältniß derselben in ganzen Zahlen darstellt, und nun diese statt der gegebenen Zahlen theilt. Das Verhältniß von ganzen Zahlen zu unzerlegten Theilzahlen aber findet man, wenn man den Nenner der gegebenen Theilzahl mit der

gan-

ganzen Zahl vervielfältigt, das Erzeugniß der Vervielfältigung zur Maaßzahl nimmt, und den Zähler der Theilzahl als die zu messende Zahl setzt.

$$4 : 3^{7} = 28)\ 3 \parallel 14'\ 28'$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$8 : 5^{\underline{6}} = 48)\ 5 \parallel 16'\ 24'$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ \hline 2 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

Es heißt daher im ersten Beispiel: 4 mal 7 ist 28, 3 ist 3. Das Verhältniß von 4 zu 3^{7} ist demnach gleich 28 zu 3, und da 28 in 3 enthalten ist, ein vierzehntelmal und ein achtundzwanzigstelmal, so ist auch 4 in 3^{7} ein vierzehntelmal und ein achtundzwanzigstelmal enthalten. Das zweite Beispiel wie das erste.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

22.

Von der Zusammensetzung der Zahlen.

Eutoc. comment. in Archim. dimens. circ. p. 556. Barlaam. Logist. lib. 1.

Es giebt zwei Gattungen der Zusammensetzung: ganze Zahlen mit ganzen Zahlen, und Theilzahlen mit Theilzahlen.

a. Zusammensetzung der ganzen Zahlen.

M ω̄ μ̄ ζ̄ . ͵γ ϡ κ α	M 847 . 3921
M ξ . ͵η υ	M 60 . 8400
M ϡ η . ͵β τ κ α	M 908 . 2321

Die Zusammensetzung der ganzen Zahlen schreitet von der Rechten zur Linken fort. Ist der Bestand der zusammengesetzten Zahlen größer als die Ordnung, zu welcher sie gehören, so wird der gezehnte Uiberschuß zur nächst höhern Ordnung gezählt. Man sehe obiges Beispiel.

Bayerische Staatsbibliothek München

b. Zusammensetzung der Theilzahlen.

$$\begin{array}{cc} 3' & 3' \\ 4' & 5' \\ \hline 7\frac{12}{} & 8\frac{15}{} \end{array}$$

Die Zusammensetzung von nicht mehr als zwei Theilzahlen geschieht, wenn man die gegebenen Theile als ganze Zahlen ausspricht, sie erstlich zusammensetzt, und dann mit einander vervielfältigt. Erstere Verrichtung giebt den Zähler, die andere den Nenner. Beim ersten Beispiel heißt es also: 4 und 3 ist 7, 3 mal 4 ist 12. Es machen demnach 3' und 4' zusammengesetzt $7\frac{12}{}$. Das andere Beispiel eben so.

Sollen mehr als zwei Theilzahlen zusammengesetzt werden, so muß man die kleinste Zahl suchen, welche von diesen — ebenfalls als ganze Zahlen behandelten — Theilzahlen gemessen wird, und wo alsdann die Enthalte, zusammengesetzt, das Gesuchte geben. Diese Zahl zu finden ist bereits gelehrt worden (14. i.).

2′		6
4′	} 12	3
6′		2
		$11^{\underline{12}}$

In diesem Beispiel ist 12 die kleinste von 2, 4, 6 meßbare Zahl, und es heißt daher: 2 in 12 habe ich 6 mal, 4 in 12 habe ich 3 mal, 6 in 12 habe ich 2 mal. Diese Theile zusammengesetzt geben 11, und den Werth dieser Theile bestimmt die Zahl 12, von welcher sie Theile sind. Es machen also 2′, 4′ und 6′ zusammengesetzt $11^{\underline{12}}$.

Werden ganze Zahlen mit daran befindlichen Theilen zusammengesetzt, so berechnet man diese Theile auf die beschriebene Art besonders, und wenn Ganze darin enthalten sind, so zählt man solche den ganzen Zahlen zu.

		30
2 5 8 6 · 2′ 4′	} 60	20
4 6 2 3 · 3′ 5′		15
		12
7 2 1 0 · 4′ 30′		$77^{\underline{60}}$ oder 1 · 4′ 30′

Sollen unzerlegte Theilzahlen zusammengesetzt werden, so geschieht dies, wenn man die kleinste von allen Nennern meßbare Zahl sucht, und dann die Enthalte mit den Zählern vervielfältigt.

6534 · $\frac{6}{7}$		2750 — 16500	
1752 · $\frac{9}{10}$	19250	1925 — 17325	
8396 · $\frac{9}{11}$		1750 — 15750	
2573 · $\frac{37}{125}$		154 — 5698	
19257 · $\frac{16773}{19250}$			$\frac{55273}{19250}$
			oder 2 · $\frac{16773}{19250}$

Es heißt also in diesem Beispiel: 7 in 19250 habe ich 2750 mal, 10 in 19250 habe ich 1925 mal u. s. w. Dann heißt es wieder: 6 mal 2750 ist 16500, 9 mal 1925 ist 17325 u. s. w. Die Erzeugnisse der Vervielfältigung geben zusammengesetzt das Gesuchte.

23.

Von der Trennung der Zahlen.

Eutoc. comment. in Archim. dimens. circ. p. 550. Barlaam Logist. lib. 1.

Es giebt zwei Gattungen der Trennung: ganze Zahlen von ganzen Zahlen, und Theilzahlen von Theilzahlen.

a. Trennung der ganzen Zahlen.

M ϑ̄ . ͵γ χ̄ λ̄ ϛ̄	M 9 . 3 6 3 6
M β̄ . ͵γ υ ϑ	M 2 . 3 4 0 9
M ζ̄ . σ κ ζ	M 7 . 0 2 2 7

Die Trennung der ganzen Zahlen schreitet von der Rechten zur Linken fort. Ist die zu trennende Zahl größer als diejenige, von welcher sie getrennt werden soll, so muß von der nächst höhern Ordnung die Ordnungszahl entnommen, und der kleineren Zahl zugezählt werden. Man sehe obiges Beispiel.

b. Trennung der Theilzahlen.

$$\begin{array}{c} 5' \\ 7' \\ \hline 2^{\underline{35}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5' \\ 8' \\ \hline 3^{\underline{40}} \end{array}$$

Die Trennung der Theilzahlen geschieht, wenn man die Theile als ganze Zahlen ausspricht, die kleinere Zahl von der größern trennt, und dann sie beide mit einander vervielfältigt. Erstere Verrichtung giebt den Zähler, die andere den Nenner. Im ersten Beispiel heißt es also: 5 von 7 bleiben 2, 5 mal 7 ist 35. Der Uiberschuß ist demnach $2^{\underline{35}}$. Das andere Beispiel eben so.

Sollen unzerlegte Theilzahlen von einander getrennt werden, so vervielfältigt man zuerst verwechselt die Zähler und Nenner, und hernach die beiden Nenner unter sich. Die Erzeugnisse der ersten Vervielfältigung, geben — von einander getrennt — den Zähler des Uiberschusses, das Erzeugniß der zweiten Vervielfältigung aber giebt den Nenner des Uiberschusses.

$$2^{\underline{3}} \quad \Big| \quad 14$$
$$4^{\underline{7}} \quad \Big| \quad 12$$
$$\overline{\quad 2^{\underline{21}} \quad}$$

$$7^{\underline{2}} \quad \Big| \quad 56$$
$$5^{\underline{8}} \quad \Big| \quad 45$$
$$\overline{\quad 11^{\underline{72}} \quad}$$

Es heißt also im ersten Beispiel: 2 mal 7 ist 14, 3 mal 4 ist 12, 12 von 14 bleiben 2, 3 mal 7 ist 21. Der Uiberschuß ist demnach $2^{\underline{21}}$. Das andere Beispiel eben so.

Noch ist zu bemerken, daß wenn Theilzahlen von ganzen Zahlen getrennt, oder Theilzahlen mit ganzen Zahlen zusammengesetzt werden sollen; dies nicht anders geschehen kann, als wenn man den ganzen Zahlen die Gestalt der von ihnen zu trennenden, oder mit ihnen zusammenzusetzenden Theilzahl giebt.

24.

Von der Vervielfältigung der Zahlen.

Eutoc. comment. in Archim. dimens. circ. p. 553. Barlaam. Logist. lib. 2.

Daß es vier Gattungen der Vervielfältigung giebt, ist bereits gezeigt worden (20.). Hier ist nur noch zu bemerken, daß die Griechen, bei der Vervielfältigung der ganzen Zahlen, von der Linken zur Rechten fortschritten,

͵β̄ τ̄ λ̄ δ̄
͵β σ κ β

Μ υ ξ ς . ͵η
Μ μ ς . ͵ς ω
Μ δ . ͵ς χ π
͵δ χ ξ η

Μ φ ι η . ͵ς ρ μ η

$$
\begin{array}{r}
2\,3\,3\,4 \\
2\,2\,2\,2 \\
\hline
M\,4\,6\,6\,.\,8\,0\,0\,0 \\
M\,4\,6\,.\,6\,8\,0\,0 \\
M\,4\,.\,6\,6\,8\,0 \\
4\,6\,6\,8 \\
\hline
M\,5\,1\,8\,.\,6\,1\,4\,8
\end{array}
$$

und daß sie sich bei der Vervielfältigung ganzer Zahlen mit Theilzahlen, oder Theilzahlen mit ganzen Zahlen, auch des Vortheils bedienten, die Vervielfältigung dadurch in eine Theilung zu verwandeln, daß sie die Theilzahlen als ganze Zahlen betrachteten.

$$
\begin{array}{r}
20 \\
8\;'\;2'\;4' \\
\hline
160 \\
10 \\
5 \\
\hline
175
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
7598 \\
24 \cdot 3' 4' \\
\hline
30392 \\
15196 \\
2532 \cdot 2' 6' \\
1899 \cdot 2' \\
\hline
186784 \cdot 6'
\end{array}
$$

Statt also beim ersten Beispiel zu sagen: 2′ mal 20 ist 10, 4′ mal 20 ist 5, so sage ich nun: 2 in 20 habe ich 10 mal, 4 in 20 habe ich 5 mal. Beim zweiten Beispiel sage ich: 3 in 7 habe ich 2 mal (bleibt 1), 3 in 15 habe ich 5 mal, 3 in 9 habe ich 3 mal, 3 in 8 habe ich 2 · 2′ 6′ mal u. s. w. Hier noch zwei andere Beispiele.

5 3 2 0 · 4' 6'
6 4 5

2 6 6 0 0
2 1 2 8 0
3 1 9 2 0
1 6 1 · 4'
1 0 7 · 2'

3 4 3 1 6 6 8 · 2' 4'

3 0 1 3 · 2' 4'
3 0 1 3 · 2' 4'

9 0 3 9
3 0 1 3
9 0 3 9 0
1 5 0 6 · 2'
7 5 3 · 4'
1 5 0 6 · 2' · 4' 8'
7 5 3 · 4' · 8' 16'

9 0 8 2 6 8 9 · 16'

Das erste Beispiel enthält nichts Besonderes, als daß es von den beiden vorhergehenden, in Hinsicht der Theilzahlen, umgekehrt ist; und ich sage also: 4 in 6 habe ich 1 mal (bleiben 2), 4 in 24 habe ich 6 mal, 4 in 5 habe ich 1 · 4′ mal u. s. w. Das zweite Beispiel ist die Vereinigung der drei vorhergehenden, und wird eben so gerechnet, nur daß am Ende auch die Theilzahlen unter sich — und zwar hier als wirkliche Theilzahlen — nach dem zweiten Einmaleins (20. b.) vervielfältigt werden. Ich sage daher: 2′ mal 2′ ist 4′, 2′ mal 4′ ist 8′ u. s. w.

Sollen ganze Zahlen mit unzerlegten Theilzahlen vervielfältigt werden, so geschieht dies, wenn man die zu vervielfältigende ganze Zahl erst mit dem Nenner theilt, und dann den Enthalt mit dem Zähler vervielfältigt.

```
    2 4 7
      3 7 · 6²
  ─────────
    9 8 8
  7 4 1
    2 1 1 · 5²
──────────────
  8 6 0 9 · 5²
```

$$
\begin{array}{r}
1838 \cdot 9^{\underline{11}} \\
1838 \cdot 9^{\underline{11}} \\
\hline
14704 \\
5514 \\
14704 \\
1838 \\
1503 \cdot 9^{\underline{11}} \\
1503 \cdot 9^{\underline{11}}\ 81^{\underline{121}} \\
\hline
3381252 \cdot 37^{\underline{121}}
\end{array}
$$

Beim ersten Beispiel wird daher 247 durch 7 getheilt, welches den Enthalt $35 \cdot 2^{\underline{7}}$ giebt; dann der Enthalt $35 \cdot 2^{\underline{7}}$ mit 6 vervielfältigt, welches das Erzeugniß $210 \cdot 12^{\underline{7}}$ oder $211 \cdot 5^{\underline{7}}$ giebt. Das zweite Beispiel eben so, nur wird hier noch zuletzt $9^{\underline{11}}$ mit $9^{\underline{11}}$ vervielfältigt.

25.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

Euclid. Elem. lib. 8. prop. 4. Barlaam. Logist. lib. 5. prop. 15.

Zusammengesetzt werden Verhältnisse, wenn man Zahlen findet, die sie in ungetrennter Folge darstellen. Um die ersten beiden von mehreren gegebenen Verhältnissen zusammenzusetzen, wird das Vorderglied des ersten mit dem Vordergliede des zweiten, das Hinterglied des ersten mit dem Vordergliede des zweiten, und das Hinterglied des ersten mit dem Hintergliede des zweiten, vervielfältigt.

$$\frac{1:2,\ 3:4,\ 2:5}{3\ :\ 6\ :\ 8\ :\ 20}$$

Ich sage daher in obigem Beispiel: 1 mal 3 ist 3, 2 mal 3 ist 6 und 2 mal 4 ist 8. Bei der Zusetzung des dritten Verhältnisses muß untersucht werden ob die Zahl seines Vordergliedes, die

gefundene dritte Zahl mißt. Ist dies der Fall wie in obigem Beispiel, wo 2 die 8 nach der Zahl 4 mißt, so sage ich: 4 mal 2 ist 8, 4 mal 5 ist 20 (14. f.). Es sind also 3, 6, 8, 20 die gefundenen kleinsten Zahlen, welche die gegebenen Urverhältnisse 1 : 2, 3 : 4, 2 : 5, in ungetrennter Folge darstellen; und die Größe, aller drei gegebenen Verhältnisse zusammengesetzt, ist daher gleich 3 zu 20.

Mißt aber die Zahl des Vordergliedes des dritten Verhältnisses, nicht die dritte gefundene Zahl, wie dies bei untenstehendem Beispiel der Fall ist, indem 3 nicht die 8 mißt;

1 : 2, 3 : 4, 3 : 5, 2 : 3

3 : 6 : 8

9 : 18 : 24 : 40 : 60

so müssen alle schon in ungetrennter Folge gefundene Zahlen durch 3 vervielfältigt werden. Ich sage daher: 3 mal 3 ist 9, 3 mal 6 ist 18, 3 mal 8 ist 24. Da nun jetzt 3 die 24 nach der Zahl 8 mißt, so sage ich wie vorhin: 8 mal 3

ist 24, 8 mal 5 ist 40 (14. f.). Um das vierte Verhältniß zuzusetzen, untersucht man wieder ob die Zahl des Vordergliedes desselben, die gefundene vierte Zahl mißt. Ist dies der Fall wie in obigem Beispiel, wo 2 die 40 nach der Zahl 20 mißt, so sage ich: 20 mal 2 ist 40, 20 mal 3 ist 60. Es sind also 9, 18, 24, 40, 60 die gefundenen kleinsten Zahlen, welche die gegebenen Urverhältnisse 1 : 2, 3 : 4, 3 : 5, 2 : 3 in ungetrennter Folge darstellen, und die Größe, aller vier gegebenen Verhältnisse zusammengesetzt, ist daher gleich 9 zu 60. — Auf gleiche Weise findet man auch die Zahlen in ungetrennter Folge von mehreren gegebenen Verhältnissen.

26.

Von der Trennung der Verhältnisse.

Barlaam. Logist. lib. 5 prop. 17.

Ein Verhältniß von einem andern trennen, heißt, den Größenunterschied beider finden. Dies geschieht wenn man die Glieder derselben mit einander vervielfältigt, das Vorderglied des ersten

mit dem Hintergliede des zweiten, und das Hinterglied des ersten mit dem Vordergliede des zweiten. Die Erzeugnisse der Vervielfältigung geben den gesuchten Größenunterschied.

5 : 7 , 3 : 4

20 : 21

Es heißt also in obigem Beispiel: 4 mal 5 ist 20, 3 mal 7 ist 21, und es ist demnach 3 zu 4 um das Verhältniß 20 zu 21 kleiner als 5 zu 7. Sucht man aber den Größenunterschied zweier Verhältnisse, und die Erzeugnisse der Vervielfältigung bilden ein Verhältniß der Gleichheit, so sind auch die beiden Verhältnisse einander gleich.

13 : 39 , 19 : 57

741 : 741

27.

Von der Vervielfältigung der Verhältnisse.

Euclid. Elem. lib. 9. prop. 18 et 19. Barlaam. Logist. lib. 5. prop. 3 et 4.

Vervielfältigt wird ein Verhältniß durch den Zusatz von Gleichverhaltungszahlen; die dritte Gleichverhaltungszahl verdoppelt es, die vierte verdreifacht es, die fünfte vervierfacht es u. s. w. Um die dritte Gleichverhaltungszahl zu finden, wird das Hinterglied des gegebenen Verhältnisses mit sich selbst vervielfältigt, und das Erzeugniß der Vervielfältigung mit dem Vordergliede gemessen. Die vierte, fünfte und alle anderen Gleichverhaltungszahlen, werden gefunden, wenn man die beiden letzten Glieder mit einander vervielfältigt, und dann das Erzeugniß der Vervielfältigung, mit dem nächsten Gliede mißt. In allen diesen Fällen ist die Zahl, nach welcher das Erzeugniß der Vervielfältigung von dem nächsten Gliede gemessen wird, die gesuchte Gleichverhaltungszahl. Wird aber das Erzeugniß von dem nächsten Gliede nicht gemessen, oder haben die gegebenen Zahlen

ein Urverhältniß zu einander, so giebt es zu ihnen keine Gleichverhaltungszahl.

Es sei 3 zu 4 das zu vervielfältigende Verhältniß. Da aber 3 und 4 ein Urverhältniß zu einander haben, und es demnach keine dritte Gleichverhaltungszahl zu ihnen giebt, so müssen die Glieder dieses Verhältnisses vergrößert werden, und zwar darf dies durch keine kleinere Zahl, als die des kleinsten Gliedes des gegebenen Verhältnisses — also hier durch 3 — geschehen. Ich sage daher: 3 mal 3 ist 9, 3 mal 4 ist 12, und es sind also 9 und 12 die kleinsten Zahlen in dem Verhältniß wie 3 zu 4, zu welchen es eine dritte Gleichverhaltungszahl giebt.

9 : 12 : | 16 — — — — — — 144

Denn das Erzeugniß von 12 mal 12 ist 144, 144 aber wird von 9 nach der Zahl 16 gemessen. Es ist demnach 16 die gesuchte dritte Gleichverhaltungszahl.

Da nun die Zahlen 9 und 16 ein Urverhältniß zu einander haben, und es daher zu 9, 12, 16 keine vierte Gleichverhaltungszahl giebt, so

müssen diese Zahlen wiederum durch 3 vervielfältigt werden. Ich sage daher: 3 mal 9 ist 27, 3 mal 12 ist 36, 3 mal 16 ist 48, und es sind also 27, 36, 48 die kleinsten Zahlen in dem Verhältniß wie 3 zu 4, zu welchen es eine vierte Gleichverhaltungszahl giebt.

27 : 36 : 48 : | 64 — — — — — — — — 1728

Denn das Erzeugniß von 36 mal 48 ist 1728, 1728 aber wird von 27 nach der Zahl 64 gemessen. Es ist demnach 64 die gesuchte vierte Gleichverhaltungszahl.

Auf gleiche Weise werden auch die anderen Gleichverhaltungszahlen gefunden. Jedoch ist das Finden derselben, nach den gegebenen Schematen (16.), die gleichsam das Einmaleins der Vervielfältigung der Verhältnisse sind, um vieles leichter.

28.

Von der Theilung der Verhältnisse.

Theon. smyrn. de Mus. cap. 61. Boeth. Arithm. lib. 2. cap. 40.

Es giebt drei Gattungen der Theilung: die arithmetische, geometrische, und harmonische. Ein Verhältniß theilen aber heißt, zwischen zwei gegebenen Zahlen eine Mittelzahl finden. Es sei 10 zu 40 das Verhältniß welches auf die drei verschiedene Arten getheilt werden soll.

a. Arithmetische Theilung.

15   15

10 : 25 : 40

2 : 5   5 : 8

Bei dieser Theilung entstehen gleiche Unterschiede und ungleiche Verhältnisse. Man erhält die Mittelzahl, wenn man das Vorder- nnd Hinterglied zusammensetzt, und von dem Bestand die Hälfte nimmt, welches die gesuchte Mittelzahl ist. Ich sage daher in obigem Beispiel: 40 und 10

ist 50, die Hälfte von 50 ist 25. Es ist also 25 die gesuchte Mittelzahl. Dies heißt auch die arithmetische Mitte.

b. Geometrische Theilung.

10   20
10 : 20 : 40
1 : 2   1 : 2

Bei dieser Theilung entstehen ungleiche Unterschiede und gleiche Verhältnisse. Man erhält die Mittelzahl, wenn man die beiden Glieder des gegebenen Verhältnisses mit einander vervielfältigt, und dann von diesem Erzeugniß die Viereckseite nimmt, welches die gesuchte Mittelzahl ist. Ich sage daher in obigem Beispiel: 10 mal 40 ist 400. Von 400 ist 20 die Viereckseite, denn 20 mal 20 ist 400. Es ist also 20 die gesuchte Mittelzahl. Dies heißt auch die geometrische Mitte.

c. Harmonische Theilung.

6   24
10 : 16 : 40
5 : 8   2 : 5

Bei dieser Theilung entstehen ungleiche Unterschiede und ungleiche Verhältnisse. Man erhält die Mittelzahl, wenn man das kleinere Glied des gegebenen Verhältnisses vom größeren trennt, den Uiberschuß wieder mit dem kleineren Gliede vervielfältigt, dann mit dem Bestand beider Glieder das Erzeugniß der Vervielfältigung theilt, zu dem Enthalte aber wieder das kleinere Glied zusetzt, wo sodann der Bestand von beiden die gesuchte Mittelzahl giebt. Ich sage daher in obigem Beispiel: 10 von 40 bleiben 30, 30 mit 10 vervielfältigt macht 300, die beiden Glieder geben zusammengesetzt 50, 300 durch 50 getheilt giebt 6, und zu 6 das kleinere Glied 10 gesetzt, giebt 16. Es ist also 16 die gesuchte Mittelzahl. Dies heißt auch die harmonische Mitte.

29.

Von jeder Nichtviereckzahl die genäherte Viereckseite zu finden.

Barlaam. Logist. lib. 2. prop. 39.

Die genäherte Viereckseite einer Nichtviereckzahl findet man auf folgende Art: Es wird zuerst

die der gegebenen Zahl zunächst größere Viereckzahl gesucht (20. a.), mit der Seite derselben die gegebene Zahl getheilt, dann das Erzeugniß der Theilung mit der Viereckseite zusammengesetzt, und von dem Bestand beider die Hälfte genommen. Diese Hälfte ist die erste genäherte Seite der gegebenen Zahl. Ist aber diese Seite noch um vieles zu groß, so wird damit, statt der Viereckseite, das obige Verfahren wiederhohlt.

Es sei 3 die gegebene Zahl, und 2 die Seite der zunächst größeren Viereckzahl.

$3 - 2 - 1{\cdot}1^{\underline{2}} - 7^{\underline{4}}$

3 durch 2 getheilt giebt $1{\cdot}1^{\underline{2}}$, 2 und $1{\cdot}1^{\underline{2}}$ zusammengesetzt und die Hälfte davon genommen, giebt $7^{\underline{4}}$. Da nun aber $7^{\underline{4}}$ mit sich selbst vervielfältigt $3{\cdot}1^{\underline{16}}$ macht, so ist $7^{\underline{4}}$ als Viereckseite von 3 noch um vieles zu groß, und es muß daher die Annäherung fortgesetzt werden.

$3 - 7^{\underline{4}} - 12^{\underline{7}} - 97^{\underline{56}}$

3 durch $7^{\underline{4}}$ getheilt giebt $12^{\underline{7}}$, $7^{\underline{4}}$ und $12^{\underline{7}}$ zusammengesetzt und die Hälfte davon genommen,

giebt $97\frac{56}{}$. Da nun $97\frac{56}{}$ mit sich selbst vervielfältigt $3 \cdot 1\frac{3136}{}$ macht, so ist $97\frac{56}{}$ als Viereckseite von 3 immer noch zu groß.

$$3 — 97\frac{56}{} — 168\frac{97}{} — 18817\frac{10864}{}$$

3 durch $97\frac{56}{}$ getheilt giebt $168\frac{97}{}$, $97\frac{56}{}$ und $168\frac{97}{}$ zusammengesetzt und die Hälfte davon genommen, giebt $18817\frac{10864}{}$. Da nun $18817\frac{10864}{}$ mit sich selbst vervielfältigt $3 \cdot 1\frac{118026496}{}$ macht, so ist $18817\frac{10864}{}$ nur noch um sehr weniges größer als die echte Viereckseite von 3; und da die echte Viereckseite von 3 niemals zu erreichen ist, so kann $18817\frac{10864}{}$ oder $1 \cdot 7953\frac{10864}{}$ statt dieser gebraucht werden.

Bemerkung. Der kleinste Unterschied zweier Zahlen ist die Einheit. Durch Annäherung ist daher weiter nichts zu erlangen, als daß man den Werth dieser Einheit, indem man sie zu einem Theil einer größeren Zahl macht, zu verringern sucht. So sind alle Vierecke der genäherten Vierseiten von 3 um die Einheit zu groß; die überragende Einheit der ersten Annäherung aber ist $1\frac{16}{}$, der zweiten $1\frac{3136}{}$, und der dritten $1\frac{118026496}{}$.

Wie nun ferner die Vierecke der Seiten $7^{\underline{4}}$, $97^{\underline{56}}$, $18817^{\underline{10864}}$ u. s. w. alle größer als 3 sind, so sind wiederum die Vierecke der Seiten $6^{\underline{4}}$, $96^{\underline{56}}$, $18816^{\underline{10864}}$ u. s. w. alle kleiner als 3. Der Größenunterschied dieser Seiten aber ist die Einheit. Um also die wirkliche Viereckseite von 3 zu erhalten, würde nothwendig die Einheit getheilt werden müssen, was unmöglich ist (4.). Demnach bleibt die echte Viereckseite einer Nichtviereckzahl, wegen der Untheilbarkeit der Einheit, auf immer unerreichbar.

30.

Geometrische Theilung der Verhältnisse durch Annäherung.

Barlaam. Logist. lib. 5. Euclid. sect. canon. theor. 3. Diophant. Arithm. lib. 4. Quaest. 23 et 33.

Zwischen zwei Zahlen, welche mit einander vervielfältigt, nicht eine Viereckzahl als Erzeugniß

geben (28. b.), fällt keine mittlere Gleichverhaltungszahl; und es kann das Verhältniß solcher Zahlen, nur durch Annäherung getheilt werden. Soll z. B. das anderthalbige Verhältniß 3 zu 2 getheilt werden, so sucht man die genäherte Viereckseite von 6, indem die beiden Glieder dieses Verhältnisses, mit einander vervielfältigt, 6 geben. Die Theilung selbst geschieht, wenn man die Glieder des gegebenen Verhältnisses mit dem Nenner der genäherten Viereckseite vervielfältigt, und den Zähler als Mittelzahl setzt. Die genäherte Viereckseite von 6 ist $\frac{4801}{1960}$. Ich vervielfältige daher 3 und 2 mit 1960, und setze 4801 als Mittelzahl.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & : & & : & 2 \\ & & & & 1960 \\ \hline 5880 & : & 4801 & : & 3920 \end{array}$$

Da nun das Verhältniß 4801 zu 3920 nur um 23049601 zu 23049600 größer ist als das Verhältniß 5880 zu 4801, so theilt die Zahl 4801

das gegebene anderthalbige Verhältniß beinahe in zwei gleiche Hälften; und da ferner die wirkliche Mitte, wegen der Untheilbarkeit der Einheit, niemals zu erreichen ist, so kann die Zahl 4801 statt der eigentlichen Gleichverhaltungszahl gesetzt werden.

Bemerkung. Die Griechen lehren zwar die genäherte Viereckseite und genäherte Gleichverhaltungszahl arithmetisch finden, gebrauchen sie jedoch beide nur in der Logistik, in der Arithmetik selbst aber niemals. Die Gründe dieses Verfahrens sind leicht einzusehen. Denn zwischen zwei Linien — welches Verhältniß sie auch zu einander haben mögen — ist jederzeit eine mittlere Gleichverhaltungslinie möglich. Ist aber das Verhältniß dieser beiden Linien z. B. gleich 3 zu 2, so ist die mittlere Linie unverhältig (ἄλογος) d. h. ihre eigentliche Größe kann nicht genau durch Zahlen ausgedrückt werden. Wenn ich mich aber der wahren Größe dieser Linie, immer mehr und mehr zu nähern suche, so trachte ich etwas Wirkliches zu erreichen, welches wegfällt, sobald die Arith-

methik auf sich selbst beschränkt ist. Denn zwischen 3 und 2 — bloß als Zahlen betrachtet — giebt es keine geometrische Mitte, und es ist daher in diesem Fall, jede Annäherung ein Bestreben, sich etwas gar nicht Vorhandenem zu nähern.

Fehler der Neueren.

31.

Von der Einheit.

Sonderbar genug ist, daß unsere Mathematiker es den Griechen nachsagen, die Zahl sei eine aus Einheiten bestehende Größe, und demohngeachtet die Einheit für eine Zahl halten. Denn die Einheit müßte ja — der Definition zufolge — wenn sie eine Zahl wäre, auch aus Einheiten zusammengesetzt sein. Wenn ich nun z. B. sage: Ein Regiment ist eine aus Soldaten bestehende Größe (Menge); so wäre es doch ungereimt, wenn ich nun auch behaupten wollte, der einzelne Soldat sei ebenfalls ein Regiment, und jeder Soldat aus Soldaten zusammengesetzt.

32.

Von den Brüchen.

Unsere Mathematiker sagen: Brüche sind Theile der Einheit, und entstehen wenn eine kleinere Zahl durch eine größere getheilt wird; z. B. 1 durch 16 getheilt giebt den Quotienten $\frac{1}{16}$ als den sechzehnten Theil der Einheit.

Hier ist eine Metze Weitzen, und hier ein Maaß, welches genau 16 Metzen hält. Mit diesem Maaße bitte ich die Herrn Mathematiker mir doch gefälligst die Metze Weitzen in 16 gleiche Theile zu theilen. Es wird den Männern gewiß ein Leichtes sein, denn sie brauchen ja nur den obigen Satz praktisch auszuführen. (3. a.)

33.

Von den positiven und negativen Größen.

Unsere Mathematiker sagen: Positiv und negativ heißen Größen, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß die eine die andere vermindert z. B. Vermögen uud Schulden. Die

positiven Größen sind alle größer als nichts, die negativen Größen alle kleiner als nichts.

Aber es werden ja auch bei Rechnungen mit unbenannten Einheiten die + und — gebraucht, wie wollen denn das die Herrn erklären? denn unbenannte Einheiten sind gar kein Gegenstand des Besitzes. Ferner wie ist es möglich, daß etwas kleiner als nichts, und doch eine Größe sein kann? Es lehren zwar Einige: ein solches Nichts sei nicht nichts, sondern eine gewisse Art Etwas. Aber diese Erklärung von Nichts taugt nichts, denn aus nichts wird nichts.

34.

Rechnung von positiven und negativen Größen.

Unsere Mathematiker sagen: Negative Größen können die positiven übertreffen, und es kann daher ohne Bedenken + 2 — 10 gesetzt werden. — Wenn nun aber in dem gegebenen Beispiel die Einheit ein Groschen wäre, so würde es heißen: 2 Groschen weniger 10 Groschen. Ich bitte die

Herrn Mathematiker, doch einmal 2 Groschen auf den Tisch zu legen, und dann von diesen 2 Groschen, 10 Groschen wegzunehmen. (3. b.)

Ferner heißt es: Minus mit minus multiplicirt giebt plus, und minus mit plus multiplicirt giebt minus. — Wenn nun plus Vermögen und minus Schulden ist (33.), so wird man ja auch ohne zu lügen sagen können: Schulden mit Schulden multiplicirt giebt Vermögen, und Schulden mit Vermögen multiplizirt giebt Schulden. Denn ein Satz, der theoretisch wahr ist, muß es auch praktisch sein.

35.

Von den Progressionen.

Unsere Mathematiker sagen: Lies't man die arithmetische Progression rückwärts, so kommt man nach der Einheit auf negative Glieder, wie z. B. 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7 u. s. w. Lies't man die geometrische Progression rückwärts, so kommt man nach der Einheit auf Brüche, wie z. B. 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ u. s. w.

Nun ist aber bereits gezeigt worden, daß es keine negativen Größen giebt (33.), und daß die Einheit untheilbar ist (4.). Es sind demnach die obigen Progressionen — gemalte Progressionen. Gemalt aber ist nicht gerechnet.

36.

Von der unendlich großen Zahl.

Die unendlich große Zahl ∞ entsteht, wenn man mit 0 in 1 dividirt. Aber man muß ja nicht glauben, daß diese unendlich große Zahl nicht noch unendlich vergrößert werden könnte; denn $\frac{2}{0}$ sind größer als $\frac{1}{0}$, und $\frac{3}{0}$ sind wieder größer als $\frac{2}{0}$, und $\frac{4}{0}$ sind größer als $\frac{3}{0}$, und so kann das unendlich Große ins Unendliche vergrößert werden. Hieraus geht nun die wichtige Lehre hervor, daß Null keinesweges bloß ein Zeichen für Nichts ist, sondern daß sie eine wirkliche Größe darstellt. Denn eine Größe muß sie doch wohl seyn, da die Einheit durch Null getheilt werden kann, und drei Nultel größer sind als zwei Nultel.

37.

Von den unmöglichen Zahlen.

Unsere Mathematiker sagen: Eine unmögliche Zahl ist die Quadratwurzel einer negativen Zahl; indem sowohl negative als positive Zahlen, mit sich selbst multiplicirt + geben, und man doch — haben will.

Da nun die unmöglichen Zahlen unmöglich sind, so sollte man glauben, daß auch ihr Gebrauch in der Arithmetik unmöglich wäre. Aber dieser Meinung sind unsere Mathematiker ganz und gar nicht, und sie haben Recht; denn z. B. das Ungereimte der negativen Größen läßt sich in der That durch die unmöglichen Zahlen am besten darthun.

38.

Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

Unsere Mathematiker sagen: Wenn man durch die Subtraction untersucht, um wie viel eine Zahl größer als die andere ist; so betrachtet man diese beiden Zahlen in ihrem arithmetischen Verhältniß.

Allein durch die Subtraction erfährt man bloß, um wie viel Einheiten die eine Zahl größer als die andere ist, aber man lernt dadurch nicht den Werth dieser Einheiten, folglich auch nicht das Verhältniß beider Zahlen kennen (11.). Es giebt demnach weder arithmetische Verhältnisse, noch arithmetische Proportionen.

Die griechischen Mathematiker theilen zwar die Proportionen ebenfalls in geometrische und arithmetische, verstehen aber darunter ganz etwas anderes als wir. Geometrisch heißen bei ihnen alle Proportionen, die aus vielfachen Verhältnissen bestehen; indem in der Geometrie, ohne den Gebrauch von Zahlen, keine andere Proportionen möglich sind (Elem. lib. 5.). Arithmetisch hingegen heißen alle Proportionen, die aus übertheiligen oder übertheilten Verhältnissen bestehen; wiederum, weil solche Proportionen nur der Arithmetik allein angehören.

39.

Von den Decimalbrüchen.

Decimalbrüche heißen in der neuern Arithmetik diejenigen Theilzahlen, welche irgend eine von denen der Einheit gleichnamigen Zahlen (8.), wie 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. zum Nenner haben. Es können daher, wie leicht zu erachten, nur sehr wenige Größen durch Decimalbrüche ausgedrückt werden. Denn da 10, als die kleinste gleichnamige Zahl der Einheit, nur von den Urzahlen 2 und 5 gemessen wird, so werden auch alle anderen der Einheit gleichnamigen Zahlen, nur von 2 und 5 und von den Produkten aus 2 und 5 gemessen. Demnach sind alle diejenigen Brüche, deren Nenner weder 2 noch 5, noch irgend ein Produkt aus 2 und 5 ist, wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$ u. s. w. nicht in Decimalbrüche zu verwandeln. Unsere Mathematiker sagen zwar: man könne sich dem wahren Werthe eines solchen Bruches so weit nähern, daß das was noch daran fehle, kleiner sei, als jede Größe, die sich angeben lasse. Das ist aber falsch, denn der kleinste Unterschied zweier Zahlen ist die Einheit (29.). Doch warum

soll denn überhaupt ein gewöhnlicher Bruch, in einen Decimalbruch verwandelt werden? der Bequemlichkeit des Rechnens wegen? denn andere Vortheile gewähren die Decimalbrüche nicht. Mein Gott! ist denn das Rechnen bei unserem so äußerst vollkommenen Ziffernsystem noch nicht bequem genug? und muß man einer solchen lächerlichen Bequemlichkeit, so schamlos die mathematische Gewißheit opfern?!

40.

Rechnung mit Decimalbrüchen.

Jeder echte Bruch enthält entweder Theile eines Ganzen, oder ist selbst ein Theil des Ganzen (14. d.) diesem zufolge müßte also auch der Decimalbruch 0,33333, welcher statt $\frac{1}{3}$ gebraucht wird, entweder Theile eines Ganzen enthalten, oder selbst ein Theil des Ganzen sein. Ein Theil des Ganzen ist er nicht; denn ein Theil ist, der das Ganze mißt (3. d.), und $\frac{33333}{100000}$ mißt nicht das Ganze $\frac{100000}{100000}$. Aber es enthält auch nicht Theile des Ganzen, denn vervielfältigen wir $\frac{33333}{100000}$ mit

3, so erhalten wir $\frac{99999}{100000}$. Doch $\frac{99999}{100000}$ ist kein Ganzes; denn ein Ganzes ist, dem kein Theil fehlt (3. c.), und der Zahl $\frac{99999}{100000}$ fehlt ein Theil. Es können demnach die genäherten Decimalbrüche, da keiner derselben weder Theile eines Ganzen enthält, noch selbst ein Theil des Ganzen ist, gar nicht vor dem Richterstuhl der gesunden Vernunft bestehen.

Was aber den Unterschied der wahren Größen und genäherten Decimalbrüche betrifft, so ist dieser bei Fortschreitung zu großen Zahlen, gar nicht so ganz unbedeutend wie die Herrn Mathematiker wohl meinen. Denn wenn z. B. Jemand statt $\frac{1}{24}$ Thaler, den Decimalbruch 0,04166 nimmt, so wird er sich schon bei einer Billion, um hundert und sechzig Millionen Thaler verrechnet haben. Wie lächerlich würde nicht erst des Archimedes Sandberechnung in Decimalbrüchen sein!

41.

Von den Irrationalzahlen.

Unsere Mathematiker sagen: Eine Irrationalzahl ist die echte Quadrat- oder Cubikwurzel einer Nichtquadrat- oder Nichtcubikzahl. Jede Irrationalzahl bleibt unerreichbar, und es kann daher eine solche Zahl durch keine Zahl ausgedrückt werden.

Hier werden drei Sätze angenommen: erstens, daß die Irrationalzahl eine Zahl ist, zweitens, daß sie unerreichbar bleibt, und drittens, daß sie durch keine Zahl ausgedrückt werden kann. Die letzten beiden Sätze sind unbedingt wahr; aber eben weil diese beiden Sätze wahr sind, ist der erste Satz falsch. Es gehören demnach auch die Irrationalzahlen, zur edlen Sippschaft der unmöglichen Zahlen (37.). Was aber die rationalen Theile der Irrationalzahlen betrifft, so ist das Ungereimte ihres Gebrauchs in der Arithmetik, bereits erklärt worden (30).

42.

Buchstabenrechnung.

Die Ziffer ist das Bild einer Zahl, der Buchstabe nur das Bild der Ziffern. Auffallend ist es daher in der That, daß unsere Mathematiker lieber mit den Bildern der Ziffern, als mit den Ziffern selbst rechnen. Frägt man sie um die Ursache hiervon, so erhält man zur Antwort: dies geschehe um die Größen allgemein auszudrücken. Was mögen sie aber doch wohl in der Arithmetik allgemein nennen? Ist es etwa daß z. B. der Buchstabe n alle nur mögliche Zahlen vorstellen kann? das wäre doch wohl nicht richtig, denn so lange er alle Zahlen vorstellen kann, stellt er noch gar keine vor, und ohne Zahlen ist nun einmal nicht zu rechnen. Der Buchstabe bezeichnet aber nicht eher eine Zahl, bis sie nicht genannt worden, und durch das Nennen der Zahl hört wieder das Allgemeine auf. So wäre denn die Buchstabenrechnung überflüssig. Sie ist noch mehr wie dies, sie ist thöricht. Denn sie entbehrt, da die Buchstaben nicht wie die Ziffern, einen Werth von ihrer Stelle

bekommen, gerade die größte Vollkommenheit unsers Ziffernsystems.

43.

Von den Zeichen.

Unsere Mathematiker, nicht zufrieden ohne Ziffern zu rechnen, waren auch auf Mittel bedacht ohne Worte zu rechnen. Sie haben daher eine Menge Zeichen und Hieroglyphen erfunden, um die kleinen Wörtchen: von, zu, mal, in, und, gleich, größer, kleiner u. s. w. damit auszudrücken. Sie sagen nun zwar, dies geschehe der Kürze wegen; aber das kann unmöglich die wahre Ursache sein, denn die angeführten Wörtchen nehmen wohl schwerlich mehr Raum weg, als ihre gleichbedeutende Zeichen. Die eigentliche Ursache liegt daher wohl in dem Bestreben, für rechte Tausendkünstler und Zauberer gehalten zu werden. Denn eine Rechnung im großen Styl vorgetragen, mit lateinischen, griechischen und teutschen Buchstaben, untermischt mit Exponenten und Coefficienten, mit Strichen, Bogen, Haarnadeln, Klammern, Kreuzen, Galgen,

Schlangen u. s. w. sieht allerdings einer Zauberformel ähnlicher als einer Rechnung. Nimmt man aber diesen ganzen Charlatanismus davon hinweg, so bleibt nur zu oft nichts weiter übrig, als eine nichtssagende, fade Rechnerei.

44.

Von den Logarithmen.

Unter Logarithmen versteht man in der neuern Arithmetik eine gewisse Art Rechenknecht, wodurch man das Gesuchte, fast eben so leicht, als durch gewöhnliches Rechnen finden kann. Aber wie nichts in der Welt ganz vollkommen ist, so haben auch die Logarithmen den Nachtheil, daß man den durch sie gefundenen Resultaten nie recht trauen darf, und daher der Sicherheit wegen noch einmal nachrechnen muß. Dieser Nachtheil entsteht nun wohl eigentlich nicht durch die Logarithmen selbst, sondern durch die Decimalbrüche und Irrationalzahlen, welche ihnen zur Grundlage dienen, und die bereits als höchst fehlerhaft dargestellt worden sind (39 und 41.). Könnten aber die Logarithmen ohne

ohne Decimalbrüche und Irrationalzahlen bestehen, so würden sie gewiß recht vollkommen sein.

45.

Rechnung mit Logarithmen.

Ueber die außerordentlichen Vortheile, welche die Logarithmen gewähren, ist nur eine Stimme. Vorzüglich aber bewundert man die Multiplication durch Logarithmen, weil diese in eine bloße Addition verwandelt wird. Will man z. B. wissen, wie viel 2 mal 99 macht, so findet man dies durch Logarithmen auf folgende Art: Man sucht in den Tabellen erstlich den Logarithmen der Zahl 2, schreibt ihn ab, und sucht dann auch den Logarithmen der Zahl 99, welchen man ebenfalls abschreibt. Jetzt addirt man beide gefundenen Logarithmen zusammen, und sucht dann wieder in den Tabellen, von dem als Summe erhaltenen Logarithmen, die zugehörige Zahl. Diese Zahl aber ist 198. Man weiß also nun durch dies kunstreiche — wenn gleich etwas umständliche — Verfahren, daß 99 mit 2 multiplicirt, das Produkt 198 giebt.

Ganz vortrefflich sind auch die Logarithmen zur Berechnung der Potenzen. Will man z. B. die dritte Potenz von 256 wissen, so sucht man den Logarithmen dieser Zahl, multiplicirt ihn mit 3, und sucht dann wieder von dem erhaltenen Produkt die zugehörige Zahl. Man findet auf diese Art die Zahl 16777200, und dies ist die gesuchte dritte Potenz von 256. Es ist nun wohl freilich wahr, daß diese gefundene Potenz um 16 Einheiten zu klein ist, denn die wahre dritte Potenz von 256 ist 16777216. Aber was sind 16 armselige Einheiten für so liberale Mathematiker wie die unsrigen? !

46.

Vom unrichtigen Gebrauch der arithmetischen Aequivalente.

Diophant. Alexand. Arithm. lib. 2. quaest. 8.

Es wurde bereits gesagt (21. π.) daß, wenn man das Verhältniß des Divisors und Dividendus als Bruch setze, dieser Bruch ein Aequivalent des Quotienten sei. Aequivalente sind jedoch nur dem

Werthe nach den Quotienten beständig gleich, nicht aber auch immer in den anderen der Menge zukommenden Eigenschaften. Denn z. B. die Einheit ist untheilbar, ihr Aequivalent $\frac{4}{4}$ aber theilbar; 3 ist eine ungerade Zahl, ihr Aequivalent $\frac{12}{4}$ hingegen eine gerade Zahl u. s. w. Man sieht hieraus daß es keinesweges in allen Fällen gleichgültig ist, ob die Zahl selbst oder ihr Aequivalent gesetzt wird. Die Nichtbeachtung dieses Uuterschiedes aber, hat in der neueren Arithmetik zu unzähligen Fehlern Anlaß gegeben. Ja selbst der geistreiche Diophantos hat sich verirrt, denn die Lösung eines großen Theils seiner Probleme, beruht bloß auf der Verwechslung der Zahl mit ihrem Aequivalent, und diese Probleme sind daher alle falsch. Dies zu beweisen, werde ich eins derselben nach Art der schlichten Arithmetik lösen.

Die Quadratzahl 16 soll in zwei Quadrate zerlegt werden.

Die kleinste Quadratzahl aber, welche in zwei Quadrate zerlegt werden kann, ist 25. Ich sage daher: 25 mal 16 ist 400, 25 in 400 habe ich 16 mal.

25) 400 ‖ 16
25
150
150

Jetzt sage ich ferner: $\frac{400}{25}$ sind gleich 16, und ich theile nun das Aequivalent $\frac{400}{25}$ statt 16 in zwei Quadrate. Dies geschieht, wenn ich das gegebene Quadrat 16, mit den Quadraten die in 25 enthalten sind — nemlich 9 und 16 — multiplicire.

16	16
9	16
144	256

Es ist also $\frac{144}{25}$ das kleinere gesuchte Quadrat, und $\frac{256}{25}$ das größere; beide zusammen aber machen $\frac{400}{25}$ gleich 16.

Daß Diophantos sein Versprechen, die Zahl 16 in zwei Quadrate zu zerlegen, nicht erfüllt hat, sieht ein Jeder. Aber er konnte es auch nicht erfüllen, weil die Aufgabe etwas Unmögliches, nemlich die Theilung der Einheit, voraussetzt.

Ende des ersten Theils.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Drieberg, Friedrich <<von>>,

Die Arithmetik der Griechen

Bd.: 1. 1819. - 146 S.

Leipzig 1819

Math.p. 109 l-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081689-9